

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Факультет Государственного и муниципального управления
Кафедра Государственного, муниципального и экономического управления

Основы математического моделирования социально-экономических процессов

Методические рекомендации для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов
(для студентов всех форм обучения по направлению подготовки
38.03.04 Государственное и муниципальное управление)

Новосибирск 2017

УДК 519.87(07)
ББК 65в631,я7
О-753

Составитель к.э.н. Макурина Ю.А.

Рецензент к.э.н. Сучков А.И.

Основы математического моделирования социально-экономических процессов: методические рекомендации для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Фак. ГМУ; сост. Ю.А. Макурина - Новосибирск, 2017.- 64 с.

Методические рекомендации для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов по дисциплине «Основы математического моделирования социально-экономических процессов» составлены на основании требований Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования к содержанию и уровню подготовки выпускников по направлению подготовки 38.03.04 Государственное и муниципальное управление. Рекомендации включают в себя содержание занятий и вопросы (задания) для самостоятельной работы.

Утверждено и рекомендовано к изданию методической комиссией факультета Государственного и муниципального управления НГАУ от 25 мая 2017 г. протокол № 7.

© Новосибирский государственный
аграрный университет, 2017

1. Введение

Практическое занятие – форма организации обучения, которая направлена на формирование практических умений и навыков и является связующим звеном между самостоятельным теоретическим освоением студентами учебной дисциплины и применением ее положений на практике.

Самостоятельная работа студентов – вид деятельности, при котором в условиях систематического уменьшения прямого контакта с преподавателем студентами выполняются учебные задания. К таким заданиям относятся контрольные и курсовые работы, рефераты, эссе, доклады и т.д.

При этом специфика самостоятельной работы студентов заключается в том, чтобы студенты самостоятельно получали новые знания.

Требования к уровню освоения учебной дисциплины

Дисциплина «Основы математического моделирования социально-экономических процессов» в соответствии с требованиями ФГОС ВО направлена на формирование следующих профессиональных (ПК) компетенций:

1. Умением применять основные экономические методы для управления государственным и муниципальным имуществом, принятия управленческих решений по бюджетированию и структуре государственных (муниципальных) активов (ПК-3)

2. Способностью проводить оценку инвестиционных проектов при различных условиях инвестирования и финансирования (ПК-4)

2. Цель практических (семинарских) занятий и самостоятельной работы студентов

Практические занятия направлены на закрепление и расширение знаний, полученных на лекциях.

Практические занятия по курсу «Основы математического моделирования социально-экономических процессов» направлены на практическое углубленное изучение учебной дисциплины, привитие обучающимся навыков самостоятельного поиска и анализа учебной информации, формирование и развитие у них

научного мышления, умения активно участвовать в творческой дискуссии, делать правильные выводы, аргументировано излагать и отстаивать свое мнение.

Цель самостоятельной работы студентов – овладение методами получения новых знаний, приобретение навыков самостоятельного анализа социальных явлений и процессов, усиление научных основ практической деятельности.

3. Содержание занятий и самостоятельной работы

Тема 1

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Вопросы для обсуждения

1. Понятие и типы систем.
2. Моделирование как принцип научного познания.
3. Сущность моделирования экономических процессов.
4. Понятие модели и их классификация.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Приведите примеры математической модели.

Задание 2. Приведите примеры семантической модели.

Задание 3. Обсудите различия в моделях лошади с позиций крестьянина, жокея, кавалериста, скульптора, коневода, повара. Задача обсуждения – иллюстрация целевого характера моделей.

Задание 4. В каких обстоятельствах карта местности является познавательной, а в каких – прагматической моделью?

Задание 5. Попробуйте рассмотреть ваше любимое стихотворение как модель.

Задание 6. Обсудите реальные и абстрактные аспекты дорожных знаков.

Задание 7. Приведите пример степени универсальности.

Задание 8. На рис. 1 субъект (С), объект моделирования (О) и модель (М) изображены отдельно, что можно интерпретировать как их раздельное физическое существование. Однако могут иметь место ситуации, когда они полностью или частично совмещены (например, человек изучает свой собственный организм, скажем, измеряет себе температуру).

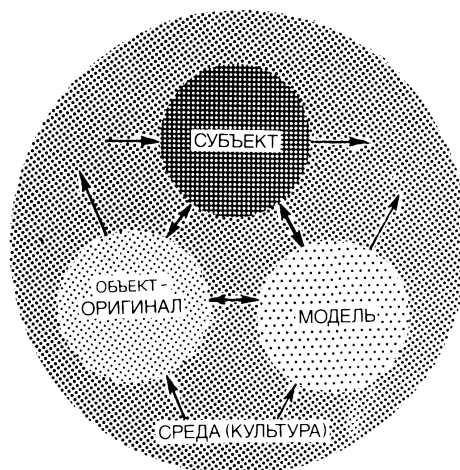


Рис. 1. Схема, отображающая модель как многоместное отношение

На рис. 2 приведено несколько вариантов такого совмещения. Придумайте реальную ситуацию, отвечающую каждому варианту схемы моделирования.

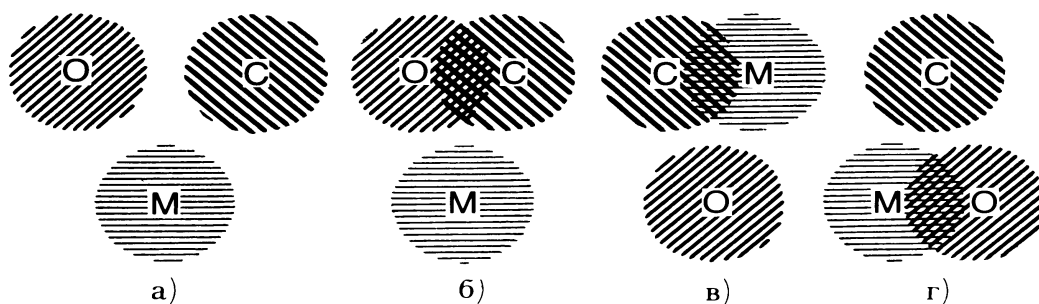


Рис. 2. Различные варианты физического совмещения отдельных компонент процесса моделирования

Задание 9. На основе предложенных объектов (игрушки из Киндер-сюрприз) постройте физическую, математическую, аналоговую и семантическую модели (пластилин, цветные карандаши, ...). Сравните их с моделями, построенными одноклассниками. Напишите рецензию на одну из работ (дать характеристику – классификация, изо-/гоморфизм, ...).

Раздел I
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ

Тема 2
МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС

Решение типовых задач

Пример 1. За отчетный период имел место следующий баланс продукции:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{11} + x_{12} + y_1; & x_2 &= x_{21} + x_{22} + y_2; \\x_{11} &= 800 - \delta; & x_{12} &= 700 - \delta; \\x_{21} &= 750 - \delta; & x_{22} &= 850 - \delta; \\y_1 &= 300; & y_2 &= 220.\end{aligned}$$

Вычислите для $\delta=543$:

а) коэффициенты прямых затрат;

б) плановый объем валовой продукции отраслей при плане выпуска конечной продукции $y^{\text{пл}}_1 = 350$; $y^{\text{пл}}_2 = 250$ при условии неизменности технологии производства.

Решение

$$\begin{aligned}x_{11} &= 800 - 543 = 257; & x_{12} &= 700 - 543 = 157; \\x_{21} &= 750 - 543 = 207; & x_{22} &= 850 - 543 = 307; \\x_1 &= 257 + 157 + 300 = 714; \\x_2 &= 207 + 307 + 220 = 734;\end{aligned}$$

а) Вычислим коэффициенты прямых затрат:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{257}{714} = 0.359; & a_{12} &= \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{157}{734} = 0.213; \\a_{21} &= \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{207}{714} = 0.289; & a_{22} &= \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{307}{734} = 0.418;\end{aligned}$$

б) Вычислим плановый объем валовой продукции отраслей:

$$\begin{cases} (1 - 0.359)x_1 - 0.213x_2 = 350 \\ -0.289x_1 + (1 - 0.418)x_2 = 250 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0.641x_1 - 0.213x_2 = 350 \\ -0.289x_1 + 0.582x_2 = 250 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x_1 :

$$0,641 x_1 = 350 + 0,213 x_2;$$

$$x_1 = \frac{350}{0.641} + \frac{0.213}{0.641} x_2$$

$$x_1 = 546,021 + 0,332 x_2$$

и подставим во второе уравнение:

$$\begin{aligned} -0,289 (546,021 + 0,332 x_2) + 0,582 x_2 &= 250; \\ -157,8 - 0,995 x_2 + 0,582 x_2 &= 250; \\ 0,582 x_2 - 0,995 x_2 &= 250 + 157,8; \\ 0,487 x_2 &= 407,8; \\ x_2 &= \frac{407,8}{0,487} = 837,371 \end{aligned}$$

$$x_1 = 546,021 + 0,332 \cdot 837,371 = 546,021 + 278,007 = 824,028.$$

Таким образом, $x_1^П = 824,028$ – плановый объем валовой продукции первой отрасли;

$x_2^П = 837,371$ – плановый объем валовой продукции второй отрасли.

Пример 2. Для условной экономики, состоящей из двух отраслей, за отчетный период известны межотраслевые потоки и вектор объемов конечного использования:

x_{ij}		$y_{отч}$	$y_{пл}$
35	45	50	55
35	55	60	75

Рассчитать плановый межотраслевой баланс при условии, что в плановом периоде конечное использование продукции задано вектором $y_{пл}$. Привести числовую схему баланса.

Решение

Рассчитаем валовой выпуск отраслей-производителей в отчетном периоде ($x_{отч}$) как сумму объемов промежуточного потребления ($\sum_{j=1}^n x_{ij}$) и конечного использования (y_i) их продукции:

$$x_{отч1} = (35+45)+50 = 130$$

$$x_{отч2} = (35+55)+60 = 150$$

Валовую добавленную стоимость (ВДС) отраслей-потребителей в отчетном периоде определим как разность между валовым выпуском и промежуточными затратами ($\sum_{i=1}^n x_{ij}$):

$$ВДС_1 = 130 - (35+35) = 60$$

$$ВДС_2 = 150 - (45+55) = 50$$

Составим матрицу коэффициентов прямых затрат (A), которая будет характеризовать количество продукции i-той отрасли, необходимое для производства единицы валовой продукции j-той отрасли. Элементы матрицы рассчитаем по формуле $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 35 \div 130 = 0,27 & a_{12} &= 45 \div 150 = 0,3 \\ a_{21} &= 35 \div 130 = 0,27 & a_{22} &= 55 \div 150 = 0,37 \\ A &= \begin{pmatrix} 0,27 & 0,3 \\ 0,27 & 0,37 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Поскольку $(E - A) \times \bar{X} = \bar{Y}$, то искомый плановый валовой выпуск отраслей возможно найти как $\bar{X} = (E - A)^{-1} \bar{Y}$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$(E - A)^{-1} = B$ – матрица коэффициентов полных затрат, характеризующая количество продукции i-той отрасли, необходимое для производства единицы конечной продукции j-той отрасли.

Рассчитаем элементы матрицы (E-A):

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 - 0,27 & 0 - 0,3 \\ 0 - 0,27 & 1 - 0,37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,73 & -0,3 \\ -0,27 & 0,63 \end{pmatrix}$$

Затем составим обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$, используя формулу:

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы (E-A).

$$\Delta = 0,73 \times 0,63 - (-0,27) \times (-0,3) = 0,4599 - 0,081 = 0,3789$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \times 0,63 = 0,63$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \times (-0,3) = 0,3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \times (-0,27) = 0,27$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \times 0,73 = 0,73$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,63 \div 0,3789 & 0,3 \div 0,3789 \\ 0,27 \div 0,3789 & 0,73 \div 0,3789 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,66 & 0,79 \\ 0,71 & 1,93 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = B \bar{Y} = \begin{pmatrix} 1,66 & 0,79 \\ 0,71 & 1,93 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 55 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,66 \times 55 + 0,79 \times 75 \\ 0,71 \times 55 + 1,93 \times 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 184 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем оставшиеся элементы модели планового межотраслевого баланса:

$$x_{ij} = a_{ij} \times x_j$$

$$x_{11} = 0,27 \times 150 = 41$$

$$x_{12} = 0,3 \times 150 = 45$$

$$x_{21} = 0,27 \times 184 = 50$$

$$x_{22} = 0,37 \times 184 = 68$$

$$\text{ВДС}_1 = 150 - (41 + 50) = 59$$

$$\text{ВДС}_2 = 184 - (45 + 68) = 71$$

Составим числовую схему планового межотраслевого баланса:

	X_{ij}		$Y_{\text{пл}}$	$X_{\text{пл}}$
	1	2		
1	41	45	55	150
2	50	68	75	184
ВДС	59	71	130 130	
$X_{\text{пл}}$	150	184		

Пример 3. Предполагается, что народное хозяйство состоит из трех отраслей. По данным отчетного периода составлен баланс народного хозяйства.

X_{ij}	1	2	3	y	z
1	27	45	27	234	478
2	78	57	46	121	368
3	56	60	17	262	537

где X_{ij} – промежуточная продукция;

y – конечная продукция;

z – запланированный объём конечной продукции.

Определить на планируемый период коэффициенты прямых и полных затрат. По заданному вектору планируемого конечного продукта Z определить валовую продукцию каждой отрасли.

1. используя балансовые уравнения, определите валовую продукцию отраслей;

2. рассчитайте коэффициенты прямых затрат и запишите их в виде матрицы (A);

3. проверьте выполнение условия продуктивности;

4. вычислите матрицу (E-A) и найдите обратную к ней – матрицу коэффициентов полных затрат – $(E-A)^{-1}$;

5. определите план выпуска валовой продукции при запланированном объеме конечной продукции Z, умножив матрицу полных затрат $(E-A)^{-1}$ на вектор Z.

Решение

1. Определяем валовую продукцию отраслей по формуле:

$$X_j = \sum_{i=1}^3 X_{ij} + Y_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Показатель X_j	Расчёт показателя для нашего случая	Полученное значение
X_1	27+45+27+234	333
X_2	78+57+46+121	302
X_3	56+60+17+262	395

2. Рассчитаем коэффициенты прямых затрат по формуле

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

$$a_{11} = \frac{27}{333} = 0,081081081$$

$$a_{12} = \frac{78}{333} = 0,234234234 \text{ и т.д. и запишем их в виде матрицы (A).}$$

Для нашего случая матрица A примет вид:

0,081081081	0,149007	0,06835443
0,234234234	0,188742	0,116455696
0,141772152	0,151899	0,043037975

2. Вычислим матрицу (E-A) и обратную к ней – матрицу коэффициентов полных затрат – $(E-A)^{-1}$

Матрица (E) имеет вид:

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таким образом, матрица (E-A) получается поэлементным вычитанием из матрицы (E) матрицы (A). Обратите внимание, что в результате на главной диагонали у вас должны получиться положительные числа (они выделены цветом), а вне её – отрицательные.

0,918919	-0,149006623	-0,06835
-0,23423	0,811258278	-0,11646
-0,14177	-0,151898734	0,956962

Тогда матрица полных затрат $(E - A)^{-1}$

1,16539	0,234991757	0,111839
0,36969	1,335939828	0,188981
0,231331	0,246867535	1,091539

Примечание: данную матрицу можно легко посчитать в файле Ms Excel с помощью команды МОБР.

3. Определим план выпуска валовой продукции при запланированном объеме конечной продукции Z , умножив матрицу полных затрат $(E-A)^{-1}$ на вектор Z .

$$X^p = (E - A)^{-1}Z,$$

где $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$

Таким образом,

703,5909
769,8205
787,5802

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Приведите примеры валовой, промежуточной и конечной продукции.

Задание 2. Приведите примеры промежуточной продукции, потребляемой самой производящей отраслью.

Задание 3. Коэффициент прямых затрат $a_{23}=0,45$. Какой можно сделать вывод.

Задание 4. За отчетный период имел место следующий баланс продукции:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + y_1;$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} + y_2;$$

$$x_{11} = 800 - \delta;$$

$$x_{12} = 700 - \delta;$$

$$x_{21} = 750 - \delta;$$

$$x_{22} = 850 - \delta;$$

Вычислите:

а) коэффициенты прямых затрат;

б) плановый объем валовой продукции отраслей при плане выпуска конечной продукции при условии неизменности технологии производства.

Вариант 1

$$\delta = 501: \quad y_1=300; \quad y_2=230.$$
$$y''_1 = 350 ; \quad y''_2 = 300$$

Вариант 2

$$\delta = 550: \quad y_1=300; \quad y_2=240.$$
$$y''_1 = 300 ; \quad y''_2 = 250$$

Вариант 3

$$\delta = 559: \quad y_1=300; \quad y_2=250.$$
$$y''_1 = 300 ; \quad y''_2 = 300$$

Задание 5. Найдите вектор валовой продукции $\bar{x}$ для заданной матрицы прямых материальных затрат A и вектора конечного потребления $\bar{y}$.

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Задание 6. Дана матрица прямых материальных затрат A и вектор валовой продукции $\bar{x}$. Найдите вектора конечного потребления $\bar{y}$.

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 500 \\ 700 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Задание 7. Предполагается, что народное хозяйство состоит из трех отраслей. По данным отчетного периода составлен баланс народного хозяйства. Определить на планируемый период коэффициенты прямых и полных затрат. По заданному вектору планируемого конечного продукта Z определить валовую продукцию отрасли.

Вариант 1

X _{ij}	I	II	III	Y
I	95	38	42	208
II	80	49	61	191
III	10	46	34	292

Z
325
356
506

Вариант 2

X _{ij}	I	II	III	Y
I	88	91	13	210
II	40	28	57	290
III	55	80	48	277

Z
320
521
470

Вариант 3

X _{ij}	I	II	III	Y
I	77	92	25	164
II	95	67	30	183
III	12	38	62	186

Z
302
423
417

Вариант 4

X _{ij}	I	II	III	Y
I	74	30	55	232
II	54	94	17	127
III	95	72	90	200

Z
473
421
332

Вариант 5

X _{ij}	I	II	III	Y
I	31	18	85	117
II	13	31	59	236
III	23	11	24	245

Z
244
368
480

Раздел II
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

Тема 3
ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Решение типовых задач

Пример 1.

Пусть производственная функция задана соотношением $y = 6\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$ (x_1 – численность работников, x_2 – производственная площадь). Найдите все возможные сочетания используемых ресурсов x_1 и x_2 , при которых товарооборот составит $y_0 = 24$, а экономическая область задана неравенством $4 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 8$.

Решение

Для нахождения минимального и максимального значения используемых ресурсов x_1 и x_2 необходимо решить 2 системы уравнений, при условии, что $y_0 = 24$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 24 = 6\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ 4 = \frac{x_2}{x_1} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 24 = 6\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ 8 = \frac{x_2}{x_1} \end{array} \right.$$

Первое уравнение в системе – производственная функция, приравненная к y_0 . Второе уравнение получаем из неравенства, задаваемого экономической областью.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} 24 = 6\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ 4 = \frac{x_2}{x_1} \end{array} \right.$$

Разделим обе части первого уравнения на 6, а второе уравнение используем для того, чтобы выразить x_2 через x_1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ x_2 = 4x_1 \end{array} \right.$$

Подставим полученную во 2-м уравнении зависимость для x_2 в первое уравнение.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = \sqrt{x_1}\sqrt{4x_1} \\ x_2 = 4x_1 \end{array} \right.$$

Занесем оба подкоренных выражения в 1-м уравнении под один корень и найдем значение x_1 .

$$\begin{cases} 4 = \sqrt{4x_1^2} \\ x_2 = 4x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2x_1 \\ x_2 = 4x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Зная значение x_1 , можно найти значение x_2 .

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Данное решение соответствует минимальному значению x_2 и максимальному значению x_1 .

$$2) \begin{cases} 24 = 6\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ 8 = \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

Далее производим аналогичные действия.

$$\begin{cases} 4 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ x_2 = 8x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \sqrt{x_1}\sqrt{8x_1} \\ x_2 = 8x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \sqrt{8x_1^2} \\ x_2 = 8x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 2\sqrt{2} \cdot x_1 \\ x_2 = 8x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = 8x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

Данное решение соответствует минимальному значению x_1 и максимальному значению x_2 .

Для того, чтобы построить изокванту, найдем уравнение изокванты в явном виде:

$$24 = 6\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

$$4 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \quad (\text{возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от корней})$$

$$16 = x_1 x_2$$

$$x_2 = \frac{16}{x_1} \text{ - уравнение изокванты в явном виде.}$$

Теперь, задавая значения одного из ресурсов, например, x_1 , находим соответствующий ему другой (x_2) из уравнения изокванты. Тогда изокванта будет иметь следующий вид (рис. 3).

Пример 2. Дана производственная функция $y = 3,2x_1^{0,4}x_2^{0,6}$, где y – объем товарной продукции в стоимостном выражении, x_1 – фонд заработной платы, x_2 – стоимость основных фондов. Произошли следующие изменения: фонд заработной платы уменьшился на 3%, стоимость основных фондов возросла на 2%. На сколько процентов при этом изменятся:

- 1) объем товарной продукции;
- 2) производительность труда;
- 3) фондоотдача.

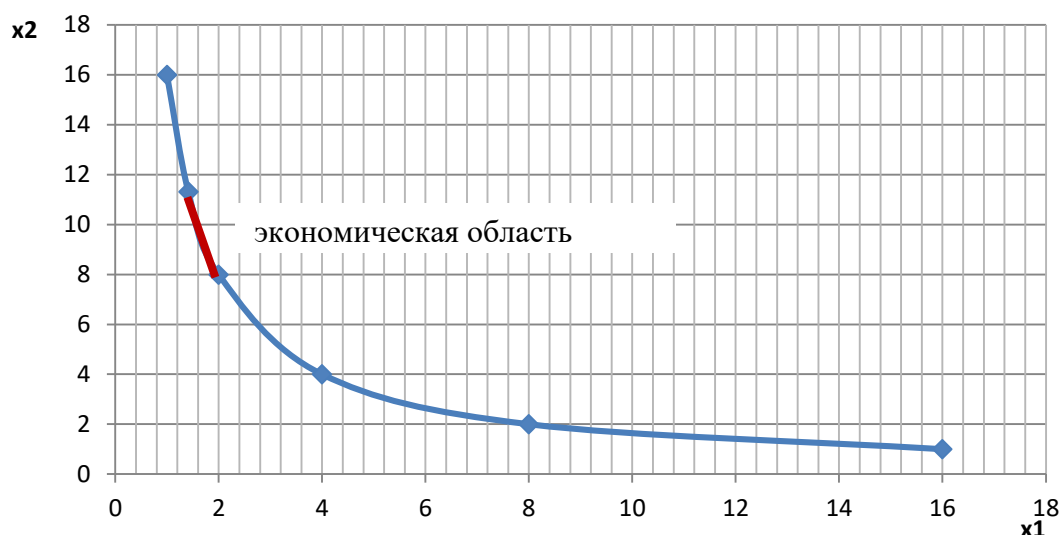


Рис. 3. Изокванта

Решение

Производственная функция имеет вид: $y = 3,2x_1^{0,4}x_2^{0,6}$, и это есть 100%. По условию, x_1 уменьшилась на 3%, т.е. стало $0,97x_1$, а x_2 на 2% увеличилось, т.е. стало $1,02x_2$. Тогда новое значение производственной функции:

$$y_n = 3,2 \cdot (0,97x_1)^{0,4} \cdot (1,02x_2)^{0,6}.$$

Узнаем, сколько процентов составляет y_n по отношению к y :

$$y - 100\%; y_n - Z\%.$$

$$Z = \frac{y_n}{y} \cdot 100;$$

$$Z = \frac{3,2 \cdot (0,97x_1)^{0,4} \cdot (1,02x_2)^{0,6}}{3,2 \cdot x_1^{0,4} \cdot x_2^{0,6}} \cdot 100 = 0,97^{0,4} \cdot 1,02^{0,6} \cdot 100 \approx 100.$$

Таким образом, объем продукции практически не изменился.

Производительность труда исходная:

$$\frac{y}{x_1} = \frac{3,2 \cdot x_1^{0,4} x_2^{0,6}}{x_1} = 3,2 \cdot x_1^{-0,6} \cdot x_2^{0,6} = 3,2 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{0,6}$$

При изменении x_1 и x_2 новая производительность труда будет:

$$\frac{y}{x_1} = 3,2 \left(\frac{1,02}{0,97} \right)^{0,6} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{0,6}$$

Пусть прежнее значение производительности труда составит 100%. Тогда новое значение производительности труда по отношению к исходному будет равно

$$Z = \frac{3,2 \cdot \left(\frac{1,02}{0,97} \right)^{0,6} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{0,6}}{3,2 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{0,6}} \cdot 100 = \left(\frac{1,02}{0,97} \right)^{0,6} \cdot 100 \approx 103.$$

Таким образом, произошло увеличение производительности труда на 3%.

Фондоотдача исходная:

$$\frac{y}{x_2} = \frac{3,2 \cdot x_1^{0,4} \cdot x_2^{0,6}}{x_2} = 3,2 \cdot x_1^{0,4} \cdot x_2^{-0,4} = 3,2 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0,4}.$$

Так как x_1 и x_2 изменились, то новая фондоотдача составит:

$$\frac{y}{x_2} = 3,2 \left(\frac{0,97}{1,02} \right)^{0,4} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0,4}$$

Пусть прежнее значение фондоотдачи – 100%. Тогда новое значение фондоотдачи по отношению к исходному будет равно

$$Z = \frac{3,2 \cdot \left(\frac{0,97}{1,02} \right)^{0,4} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0,4}}{3,2 \cdot \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{0,4}} \cdot 100 = \left(\frac{0,97}{1,02} \right)^{0,4} \cdot 100 \approx 98.$$

Таким образом, фондоотдача уменьшилась на $100 - 98 = 2\%$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Пусть производственная функция задана соотношением $y = 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Найдите все возможные сочетания используемых ресурсов x_1 и x_2 , при которых товарооборот составит $y_0 = 30$, если экономическая область задается неравенством $5 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 25$.

Задание 2. Пусть производственная функция задана соотношением $y = 9\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Найдите все возможные сочетания используемых ресурсов x_1 и x_2 , при которых товарооборот составит $y_0 = 54$, а экономическая область задана неравенством $2 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 6$.

Задание 3. Пусть производственная функция задана соотношением $y = 7\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Найдите все возможные сочетания используемых ресурсов x_1 и x_2 , при которых товарооборот составит $y_0 = 35$, а экономическая область задана неравенством $5 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 25$.

Задание 4. Пусть производственная функция задана соотношением $y = 10\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Найдите все возможные сочетания используемых ресурсов x_1 и x_2 , при которых товарооборот составит $y_0 = 70$, а экономическая область задана неравенством $7 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 49$.

Задание 5. Пусть производственная функция задана соотношением $y = 9\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Найдите все возможные сочетания используемых ресурсов x_1 и x_2 , при которых товарооборот составит $y_0 = 72$, а экономическая область задана неравенством $8 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 16$.

Задание 6. Пусть производственная функция задана соотношением $y = 4\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. Найдите все возможные сочетания используемых ресурсов x_1 и x_2 , при которых товарооборот составит $y_0 = 40$, а экономическая область задана неравенством $10 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq 25$.

Задание 7. Производственная функция для торговой организации имеет вид $f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$, где f – товарооборот (млн. руб.), x_1 – производственная площадь (тыс. кв. м), x_2 – численность работников (сотни чел.). Рассмотрите изокванту уровня $y_0 = \sqrt{100 + \delta}$ и найдите на ней точку C_1 с координатами $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ где $\bar{x}_1 = \frac{(\delta - 100)}{100}$ и точку C_2 с координатами x_1^*, x_2^* , где $x_2^* = \frac{(\delta - 300)}{100}$. Сделайте вывод о возможности замены ресурсов $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и (x_1^*, x_2^*) . Полученные результаты изобразите графически.

Расчеты произвести для:

а) $\delta = 543$.

б) $\delta = 550$.

в) $\delta = 559$.

Задание 8. Дана производственная функция $y = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, где y – объем товарной продукции в стоимостном выражении, x_1 – фонд заработной платы, x_2 – стоимость основных фондов. Произошли следующие изменения: фонд заработной платы изменился на $A\%$, стоимость основных фондов изменилась на $B\%$. На сколько процентов при этом изменится: объем товарной продукции; производительность труда; фондоотдача, если:

а) $a = 9,5$; $\alpha_1 = 0,3$; $\alpha_2 = 0,4$; $A = 6\%$; $B = -8\%$.

б) $a = 1,7$; $\alpha_1 = 0,9$; $\alpha_2 = 0,3$; $A = -5\%$; $B = 2\%$.

в) $a = 4,1$; $\alpha_1 = 0,7$; $\alpha_2 = 0,5$; $A = -3\%$; $B = 9\%$.

Тема 4

ФУНКЦИЯ ПОКУПАТЕЛЬСКОГО СПРОСА

Решение типовых задач

Пример 1. Рассчитайте коэффициент эластичности спроса от дохода на i -й товар, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Доход потребителей	16580	17780
Объем спроса i -го товара	1950	2050

Решение

$$E_i^d = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} \div \frac{I_1 - I_0}{I_0}, \quad E_i^d = \frac{2050 - 1950}{1950} \div \frac{17780 - 16580}{16580} = 0,708.$$

Следовательно, i -й товар является ценным ($E_i^d > 0$) малоэластичным ($E_i^d < 1$) товаром. При увеличении дохода потребителей на 1% спрос на этот товар увеличится на 0,708%.

Пример 2. Рассчитайте прямой коэффициент эластичности спроса от цены на i -й товар, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Цена товара	12	13
Объем спроса i -го товара	1116	1222

Решение

$$E_{ii}^p = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} \div \frac{P_1 - P_0}{P_0}, \quad E_{ii}^p = \frac{1222 - 1116}{1116} \div \frac{13 - 12}{12} = 1,14.$$

Следовательно, i -й товар является товаром Гиффина ($E_{ii}^p \geq 0$) высокоэластичным ($E_{ii}^p > 1$). При увеличении цены на i -й товар на 1% спрос на этот товар увеличится на 1,14%.

Пример 3. Рассчитайте перекрестные коэффициенты эластичности спроса от цены на i -й и j -й товары, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Цена товара i -го товара	12	13
Объем спроса i -го товара	1222	1116
Цена товара j -го товара	16	15
Объем спроса j -го товара	1560	1400

Решение

$E_{ij}^p = \frac{(1116 - 1222)/(1116 + 1222)}{(15 - 16)/(15 + 16)} = 1,405$, т.е. при уменьшении цены на j -й товар на 1% спрос на i -й товар увеличится на 1,405%.

$E_{ji}^p = \frac{(1400 - 1560)/(1400 + 1560)}{(13 - 12)/(13 + 12)} = -1,35$, т.е. при увеличении цены на i -й товар на 1% спрос на j -й товар уменьшится на 1,35%.

Таким образом, i -й и j -й товары являются невзаимосвязанными товарами.

Пример 4. Произведите классификацию товаров по следующей таблице эластичностей, если $\delta = 550$:

	<i>1 товар</i>	<i>2 товар</i>	<i>3 товар</i>
<i>1 товар</i>	$\frac{\delta - 610}{100}$	$\frac{550.5 - \delta}{100}$	$\frac{570.5 - \delta}{100}$
<i>2 товар</i>	$\frac{550.5 - \delta}{120}$	$\frac{\delta - 640}{100}$	$\frac{520.5 - \delta}{100}$
<i>3 товар</i>	$\frac{570.5 - \delta}{120}$	$\frac{520.5 - \delta}{90}$	$\frac{\delta - 680}{100}$

Решение

δ	550	<i>Вывод</i>
e_{11}	-0,6	обычный, малоэластичный
e_{22}	-0,9	обычный, малоэластичный
e_{33}	-1,3	обычный, высокоэластичный
e_{12}	0,005	1 и 2 товары взаимозаменяемые
e_{21}	0,004	
e_{13}	0,205	1 и 3 товары взаимозаменяемые
e_{31}	0,171	
e_{23}	-0,295	2 и 3 товары взаимодополняемые
e_{32}	-0,328	

Пример 5. Определить объем спроса в предстоящем периоде по товарной группе – швейные изделия, если известно, что коэффициент эластичности спроса от доходов по швейным изделиям равен 1,2, денежные доходы на душу населения в предстоящем периоде увеличатся на 10%, продажа швейных изделий на душу населения в отчетном периоде составила 800 руб., а перспективная численность населения равна 5500 человек.

Решение

1. Темп прироста спроса швейных изделий:

$$T_{\Delta y} = E \cdot T_{\Delta x}; T_{\Delta y} = 1,2 \cdot 10 = 12\%.$$

2. Темп роста продажи швейных изделий на душу населения:

$$T_y = T_{\Delta y} + 100; T_y = 12 + 100 = 112\%.$$

3. Перспективная продажа (спрос) швейных изделий на душу населения:

$$y_{\text{пл}} = \frac{y_0 \cdot T_y}{100}; y_{\text{пл}} = \frac{800 \cdot 112}{100} = 896 \text{ руб.}$$

4. Общий объем спроса (продаж) швейных изделий в предстоящем периоде:

$$Q = y_{\text{пл}} \cdot Ч_{\text{пл}}; Q = 896 \cdot 5500 = 4928 \text{ тыс. руб.}$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Рассчитайте коэффициент эластичности спроса от дохода на товар, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Средний доход на душу населения в месяц	1234	1690
Средний расход на душу населения в месяц		
- продовольственные товары	550	672
- непродовольственные товары	587	718

Задание 2. Рассчитайте коэффициент эластичности спроса от дохода на товар, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Средний доход на душу населения в месяц	1234	1690
Средний расход на душу населения в месяц		
- продовольственные товары	543	666
- непродовольственные товары	593	754

Задание 3. Рассчитайте прямой коэффициент эластичности спроса от цены на товар, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Цена товара	134	157
Объем спроса товара	14516	15555

Задание 4. Рассчитайте прямой коэффициент эластичности спроса от цены на товар, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Цена изделия	215	235
Спрос на изделие	13516	14444

Задание 5. Рассчитайте перекрестные коэффициенты эластичности спроса от цены на i -й и j -й товары, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Цена товара i -го товара	134	157
Объем спроса i -го товара	15555	14516
Цена товара j -го товара	219	291
Объем спроса j -го товара	19533	18500

Задание 6. Рассчитайте перекрестные коэффициенты эластичности спроса от цены на 1-й и 2-й товары, по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный период	Отчетный период
Цена товара 1-го товара	235	215
Объем спроса 1-го товара	14444	13516
Цена товара 2-го товара	291	219
Объем спроса 2-го товара	19533	18500

Задание 7. Произведите классификацию товаров по следующей таблице эластичностей, если $\delta = 559$:

	1 товар	2 товар	3 товар
1 товар	$\frac{\delta - 610}{100}$	$\frac{550.5 - \delta}{100}$	$\frac{570.5 - \delta}{100}$
2 товар	$\frac{550.5 - \delta}{120}$	$\frac{\delta - 640}{100}$	$\frac{520.5 - \delta}{100}$
3 товар	$\frac{570.5 - \delta}{120}$	$\frac{520.5 - \delta}{90}$	$\frac{\delta - 680}{100}$

Задание 8. Определить объем спроса в предстоящем периоде по каждой из товарных групп, если известно, что:

№ п/п	Товарная группа	Отчетный период		Плановый период	
		Продажа на душу населения, р	Коэффициент эластичности спроса по доходу	Темп прироста доходов, %	Численность населения, тыс. чел
1	Швейные изделия	85	1,15	10,0	8,5
2	Одежда	115	1,2	10,0	8,5

№ п/п	Товарная группа	Отчетный период		Плановый период	
		Продажа на душу населения, р	Коэффициент эластичности спроса по доходу	Темп прироста доходов, %	Численность населения, тыс.чел
3	Трикотажные изделия	55	0,9	10,0	8,5
4	Шелковые ткани	49	1,1	10,0	8,5
5	Фрукты	68	1,8	15,0	67
6	Картофель	25	0,7	15,0	67

Задание 9. Если при изменении дохода покупателя от 10 тыс. руб. до 14 тыс. руб. в месяц его объём спроса на товар увеличился от 25 ед. до 30 ед. в месяц, то чему будет равен коэффициент эластичности спроса по доходу.

Задание 10. Цена на товар X возросла от 10 до 12 руб., при этом объём предложения увеличился от 240 до 260 шт. Посчитайте коэффициент эластичности предложения по цене.

Задание 11. Предположим, снижение цены на некий товар от 160 до 120 руб./ед. привело к увеличению спроса от 80 до 100 тыс. ед.

Рассчитайте коэффициент эластичности спроса. Сделайте выводы.

Задание 12. Рыночный спрос на яблоки характеризуется следующей шкалой спроса: сентябрь – при цене 40 руб. величина спроса равна 60 кг, октябрь – при цене 30 руб. величина спроса увеличилась до 90 кг, ноябрь – при цене 20 руб. – 120 кг.

Используя эти данные, определите как изменилась эластичность спроса на яблоки.

Задание 13. При цене светильника 10 руб. величина спроса составляет 100 шт. При увеличении цены на 1 руб. величина спроса уменьшается на 20 светильников.

Определите коэффициент эластичности спроса по цене. Сделайте выводы.

Задание 14. Спрос населения на картофель характеризуется следующими показателями эластичности: по цене 0,6, по доходу 0,8. В будущем году общий уровень цен не измениться, доходы населения увеличатся на 4 % и цена картофеля возрастет на 5 %. На сколько изменится объём спроса на картофель?

Задание 15. Рассчитайте коэффициенты эластичности спроса от дохода и цены по i -ому и j -ому товарам, а также перекрестные коэффициенты эластичности по следующим данным. Сделайте выводы.

Показатели, руб.	Базисный период	Отчетный период
Цена товара i -го товара	12,4	14,8
Объем спроса i -го товара	384,4	414,4
Цена товара j -го товара	15,4	17,1
Объем спроса j -го товара	338,8	356,5
Доход потребителя	1000	1320

Задание 16. Рассчитайте коэффициенты эластичности спроса от дохода и цены по i -ому и j -ому товарам, а также перекрестные коэффициенты эластичности по следующим данным. Сделайте выводы.

Показатели, руб.	Базисный период	Отчетный период
Цена товара i -го товара	28	30
Объем спроса i -го товара	1148	1150
Цена товара j -го товара	38	43
Объем спроса j -го товара	3040	2908
Доход потребителя	15000	16500

Задание 17. Рассчитайте коэффициент эластичности продажи товаров от денежных доходов населения по следующим данным, руб.:

Показатели	Базисный год	Отчетный год
Средний доход на душу населения	17400	18800
Товарооборот на душу населения по хлопчатобумажным тканям	440	460

Оцените объем покупательского спроса населения по данному виду товаров на следующий год при планируемом увеличении среднедушевых доходов на 10 %, если численность населения по перспективной оценке составит 30 000 чел.

Тема 5 СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Решение типовых задач

Пример 1. В процессе имитационного эксперимента были получены следующие данные о работе 2-х канальной системы массового обслуживания:

Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	6	5	8	10	2	5	12	2	15	8
Время обслуживания 1-ой кассой, мин	10	14	8	12	10	9	14	6	3	8
Время обслуживания 2-ой кассой, мин	16	13	18	10	15	20	4	7	1	10

Построить таблицу, графики работы касс. Рассчитать абсолютные и относительные показатели работы системы.

Решение

Для начала введем необходимые условия:

- в случае незанятости обеих касс, покупатель обслуживается 1-ой кассой;
- если обе кассы заняты, покупатель становится в очередь. первый человек в очереди обслуживается той кассой, которая раньше освободилась.

Для удобства расчеты проводят в таблице (табл. 1).

Сначала заполняется первая строка. Первый покупатель всегда приходит в момент времени, равный нулю ($S_1 = 0$). 2-ой покупатель приходит через время γ_1 после 1-го, т.е. $S_2 = S_1 + \gamma_1$ ($0 + 6 = 6$). 3-ий – через время γ_2 после 2-го, т.е. $S_3 = S_2 + \gamma_2$ ($6 + 5 = 11$) и т.д.

Общая формула для расчета времени поступления покупателя:

$$S_i = \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k$$

Далее таблица заполняется по столбцам.

1-ый покупатель идет на 1-ую кассу (приоритет по условию), его обслуживание начинается в момент времени **0** и заканчивается в момент времени **10** ($0+10$).

2-ой покупатель приходит в момент времени, равный **6** и обслуживается 2-ой кассой, т.к. 1-ая касса занята. Время ожидания равно 0. Обслуживание 2-го покупателя закончится в момент времени 22 ($6 + 0 + 16$)

3-ий покупатель идет на 1-ую кассу, т.к. она уже освободилась. Он пришел в момент времени, равный 11. Время ожидания равно 0. Время обслуживания 2-го покупателя на 1-ой кассе – 14 мин. Поэтому время окончания его обслуживания составит 25 ($11 + 0 + 14$).

4-ый покупатель встанет в общую очередь (обе кассы заняты), и после ожидания в течение 3-х минут будет обслуживаться на 2-ой кассе, т.к. она освободится раньше. Время обслуживания 2-го покупателя на 2-ой кассе – 13 мин. Поэтому время окончания его обслуживания составит 35 ($19 + 3 + 13$).

И т.д.

Таблица 1

№ покупателя		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Время поступления покупателя (S_i)		0	6	11	19	29	31	36	48	50	65	73	
Время ожидания (w_i)		0	0	0	3	0	4	1	1	3	0	0	12
Касса №1	время обслуживания (t_1)	10		14		8		12	10		9		63
	время окончания обслуживания (f_1)	10		25		37		49	59		74		
Касса №2	время обслуживания (t_2)		16		13		18			10		15	72
	время окончания обслуживания (f_2)		22		35		53			63		88	

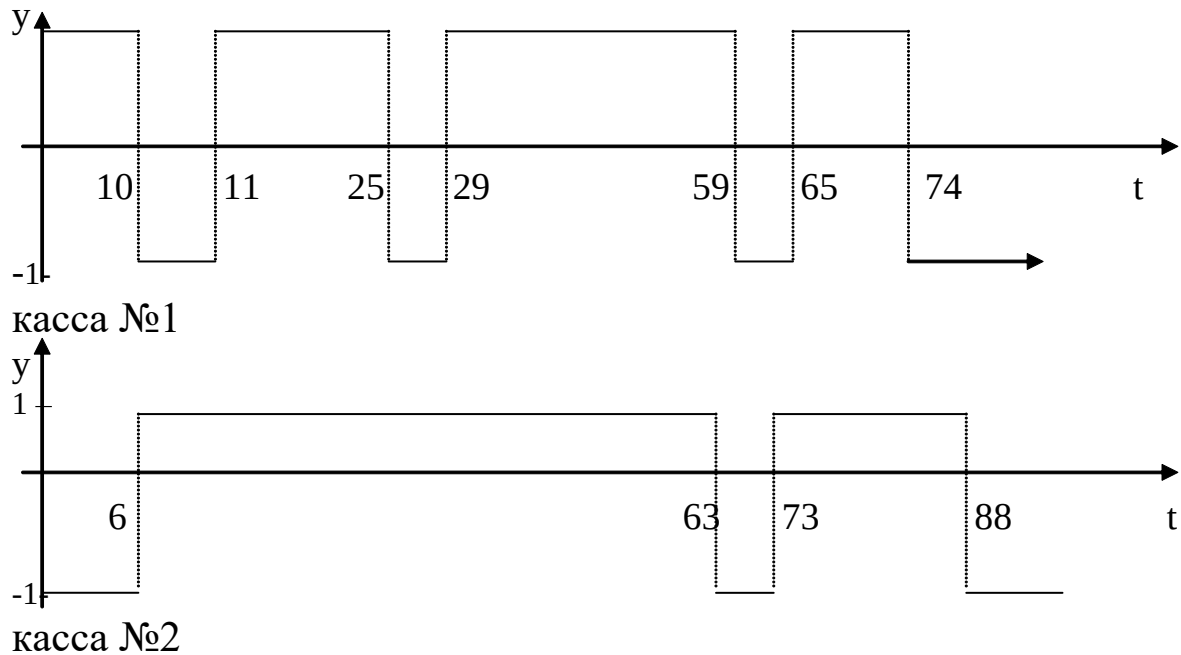
Далее изобразим графики работы касс.

По оси ОХ будем откладывать время. Ось ОУ будет иметь только два значения: 1 – касса работает, -1 – касса отдыхает.

Сначала строим график работы кассы №1. Согласно табл.1 касса начинает работать в момент времени **0** и работает до 10 минут. 2-ой

покупатель на 1-ую кассу приходит в 11 минут, значит 1 минуту касса отдыхала (с 10 до 11). Следующий покупатель на 1-ую кассу пришел в 29 минут (отдых с 25 до 29 минут) и его обслуживали до 37 минут. Далее без перерыва пришли еще 2 покупателя, вследствие чего касса была занята до 59 минут. Перед последним покупателем у кассы перерыв с 59 до 65 минут. Затем обслуживание последнего покупателя, которое закончилось в 74 минуты. После касса была свободна.

Для 2-ой кассы график строится аналогичным образом.



1. Вычислить величины.

1.1. Суммарное время ожидания: $W = \sum w_i$; $W = 12$ мин.

1.2. Чистое время работы

1-й кассы: $T_1 = \sum t_1^i$; $T_1 = 63$ мин.

2-й кассы: $T_2 = \sum t_2^i$; $T_2 = 72$ мин.

обеих касс: $T = T_1 + T_2$; $T = 63 + 72 = 135$ мин.

1.3. Время окончания обслуживания последнего покупателя

на 1-й кассе: $F_1 = \max f_1^i$; $F_1 = 74$ мин.

на 2-й кассе: $F_2 = \max f_2^i$; $F_2 = 88$ мин.

1.4. Суммарное время работы и простоя обеих касс:

$F = F_1 + F_2$; $F = 74 + 88 = 162$ мин.

1.5. Время простоя

1-й кассы: $P_1 = F_1 - T_1$; $P_1 = 74 - 63 = 11$ мин.

2-й кассы: $P_2 = F_2 - T_2$; $P_2 = 88 - 72 = 16$ мин.

обеих касс: $P = F - T$; $P = 162 - 135 = 27$ мин.

2. Рассчитать показатели.

2.1. Среднее время ожидания покупателя в очереди

$$\bar{w} = W/n; \bar{w} = 12 / 11 = 1,1 \text{ мин.}$$

2.2. Средняя доля времени работы

$$1\text{-й кассы: } p_{21} = T_1 / F_1; p_{21} = 63 / 74 = 0,85 \text{ или } 85\%$$

$$2\text{-й кассы: } p_{22} = T_2 / F_2; p_{22} = 72 / 88 = 0,818 \text{ или } 81,8\%$$

$$\text{обеих касс: } p_2 = T / F; p_2 = 135 / 162 = 0,83 \text{ или } 83\%$$

2.3. Средняя доля времени простоя

$$1\text{-й кассы: } p_{01} = (F_1 - T_1) / F_1; p_{01} = (74 - 63) / 74 = 0,15 \text{ или } 15\%$$

$$2\text{-й кассы: } p_{02} = (F_2 - T_2) / F_2; p_{02} = (88 - 72) / 88 = 0,182 \text{ или } 18,2\%$$

$$\text{обеих касс: } p_0 = (F - T) / F; p_0 = (162 - 135) / 162 = 0,17 \text{ или } 17\%$$

2.4. Среднее время обслуживания покупателя в магазине:

$$\bar{t} = T/n; \bar{t} = 135 / 11 = 12,27 \text{ мин.}$$

Пример 2. В магазине самообслуживания работают две кассы с интенсивностью 8 (треб./мин) каждая. Входящий поток требований имеет интенсивность 10 (треб./мин.). Рассчитать основные показатели работы 2-х канальной системы массового обслуживания (с точностью до тысячных).

Решение

Для начала рассчитаем параметр загрузки:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}; \alpha = 10/8 = 1,25.$$

Обязательно проверяется условие стационарности: $\alpha < n$ (n – фактическое число каналов в системе). В нашем случае оно выполнено: $1,25 < 2$.

Основные показатели для двухканальной системы рассчитываются по следующим формулам:

1) доля времени простоя всей системы (не занят обслуживанием ни один канал):

$$P_0 = \frac{2-\alpha}{2+\alpha}; p_0 = \frac{2-1,25}{2+1,25} = 0,231 \text{ или } 23,1\%$$

2) доля времени занятости одного канала (или первого, или второго):

$$P_1 = \frac{(2-\alpha) \cdot \alpha}{2+\alpha}; p_1 = \frac{(2-1,25) \cdot 1,25}{2+1,25} = 0,288 \text{ или } 28,8\%$$

3) доля времени занятости обоих каналов:

$$P_2 = \frac{\alpha^2}{2+\alpha} ; p_0 = \frac{1,25^2}{2+1,25} = 0,481 \text{ или } 48,1\%$$

Поскольку число занятых каналов образует полную группу событий, то сумма их вероятностей равна единице, т.е. $\sum p_k = 1$.

4) средняя длина очереди при двухканальной системе:

$$L_2 = \frac{\alpha^3}{4-\alpha^2} ; L_2 = \frac{1,25^3}{4-1,25^2} = 0,801$$

5) средняя доля времени простоя двухканальной СМО:

$$\rho = 1 - \frac{\alpha}{2} ; \rho = 1 - \frac{1,25}{2} = 0,375$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. В процессе имитационного эксперимента были получены данные о работе 2-х канальной системы массового обслуживания. Построить таблицу, графики работы касс. Рассчитать абсолютные и относительные показатели работы системы.

1)	Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	13	4	2	8	11	2	8	2
	Время обслуживания 1-ой кассой, мин	13	13	5	3	12	5	4	34
	Время обслуживания 2-ой кассой, мин	3	9	5	10	11	12	4	3

2)	Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	5	3	6	7	3	3	11	4
	Время обслуживания 1-ой кассой, мин	5	5	13	3	4	15	9	20
	Время обслуживания 2-ой кассой, мин	5	7	2	3	5	12	20	44

3)	Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	11	3	5	4	4	5	5	12
	Время обслуживания 1-ой кассой, мин	7	10	10	10	4	20	5	10
	Время обслуживания 2-ой кассой, мин	9	5	4	14	6	20	10	5

4)	Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	4	3	6	4	4	8	4	9
	Время обслуживания 1-ой кассой, мин	5	2	10	9	3	7	3	11
	Время обслуживания 2-ой кассой, мин	5	5	15	1	10	8	4	20

5)	Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	7	8	4	2	2	4	2	1
	Время обслуживания 1-ой кассой, мин	7	12	6	5	6	16	2	3
	Время обслуживания 2-ой кассой, мин	7	4	5	1	3	6	11	6

6)	Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	15	4	10	6	3	3	1	1
	Время обслуживания 1-ой кассой, мин	20	6	10	3	11	12	11	10
	Время обслуживания 2-ой кассой, мин	15	8	5	7	10	5	4	7

7)	Интервалы между поступлениями покупателей (γ), мин	20	6	6	7	6	1	11	8
	Время обслуживания 1-ой кассой, мин	8	12	10	4	6	12	4	8
	Время обслуживания 2-ой кассой, мин	20	2	3	6	6	3	5	5

Задание 2. Найдите показатели работы системы массового обслуживания, если параметр загрузки составляет 1,2.

Задание 3. В магазине самообслуживания работают две кассы с интенсивностью 11 (треб./мин) каждая. Входящий поток требований имеет интенсивность 15 (треб./мин.). Рассчитайте основные показатели работы 2-х канальной системы массового обслуживания (с точностью до тысячных).

Задание 4. В магазине самообслуживания работают две кассы. Входящий поток требований имеет интенсивность 10,8 (треб./мин.). Интенсивность обслуживания 6 (треб./мин) каждая. Рассчитайте основные показатели работы 2-х канальной системы массового обслуживания (с точностью до тысячных).

Задание 5. В магазине самообслуживания работают две кассы с интенсивностью 9 (треб./мин) каждая. Входящий поток требований имеет интенсивность 13 (треб./мин.). Рассчитайте основные показатели работы 2-х канальной системы массового обслуживания (с точностью до тысячных).

Задание 6. В магазине работают 2 кассы с интенсивностью обслуживания $\frac{\delta+300}{100}$ (треб./мин.) каждая. Входящий поток требований имеет интенсивность $\frac{\delta+400}{100}$ (треб./мин.). Рассчитать долю времени простоя касс и среднюю длину очереди.

Если интенсивность входящего потока станет равной $\frac{700-\delta}{10}$ (треб./мин.), то будет ли выполнено стационарности? Если будет, то во сколько раз увеличится средняя длина очереди?

Расчеты произвести для:

а) $\delta = 543$.

б) $\delta = 550$.

в) $\delta = 559$.

г) $\delta = 565$.

Тема 6

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Решение типовых задач

Пример 1. В задаче оптимального управления товарными запасами известно следующее:

- $Q (м^3) = 84,46$ - объём склада;
- $C_1 (руб/сут) = 0,186$ - затраты на хранение 1 кг товара в сутки;
- $C_2 (руб) = 203$ - затраты на завоз одной партии товара;
- $r (кг/сут) = 98$ - равномерный спрос товара в сутки;
- $k (кг/сут) = 323$ - равномерный темп поступления товара в сутки ($k > r$);
- $u (кг/м^3) = 4$ - удельная ёмкость склада;
- $\alpha (руб./м^3 * сут) = 0,161$ - фактическая арендная плата.

Требуется:

1. Определить объём заказываемой партии товара (X_1), при котором суммарные затраты на завоз и хранение минимальны.
2. В случае необходимости решить, что выгоднее: уменьшить размер заказываемой партии товара или арендовать дополнительные складские ёмкости.
3. Вычислить суточные издержки на завоз и хранение.

Пункты 1, 2 задания выполняются по схеме:

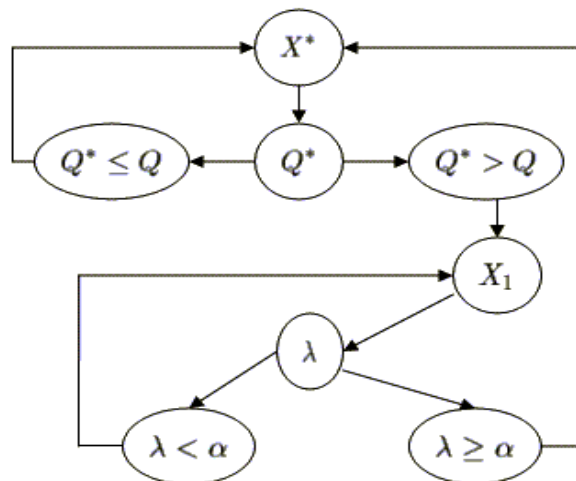


Рис. 5. Этапы решения задачи ОУТЗ

Решение

1. Определяем максимальный объем заказываемой партии товара, рассчитанный без учета имеющейся в наличии емкости склада по формуле:

$$X^* = \sqrt{\frac{2k \cdot C_2 r}{(k-r) \cdot C_1}}.$$

$$X^* = 554,15 \text{ (кг)}.$$

2. Рассчитаем емкость склада, в которой можно разместить максимальный объем товарных запасов по формуле:

$$Q^* = \frac{k-r}{k \cdot u} \cdot X^*.$$

$$Q^* = 96,5 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Далее необходимо сравнить собственную складскую емкость (Q) с емкостью, в которой можно разместить максимальный объем товарных запасов (Q^*).

Так как $Q^* > Q$ ($96,5 > 84,46$), то необходимо рассчитать объем заказа партии товара, который будет соответствовать собственной емкости склада (X_1) по формуле:

$$X_1 = \frac{k \cdot u \cdot Q}{k-r}.$$

$$X_1 \text{ составит } 484,99 \text{ (кг)}.$$

3. Определим предельную арендную плату (множитель Лагранжа) по формуле:

$$\lambda = \frac{C_2 r k u}{(k-r)x^2} - \frac{C_1 u}{2}.$$

Предельная арендная плата равна 0,114 (руб./м³ * сут).

Необходимо сравнить фактическую и предельную арендную плату, чтобы принять решение об аренде дополнительных складских емкостей или отказе от аренды.

Так как, $\alpha > \lambda$ ($0,161 > 0,114$), то аренда дополнительных складских емкостей невыгодна и объем заказываемой партии нужно уменьшить, в этом случае объем заказываемой партии составит величину $X_1 = 484,99$ (кг.)

4. Вычислим суточные издержки на заказ и хранение по формуле:

$$y(x_1) = \frac{(k-r)C_1}{2k} \cdot X_1 + \frac{C_2 r}{X_1}.$$

Суточные издержки на заказ и хранение составят 72,44 (руб).

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. В задаче оптимального управления товарными запасами известно следующее:

Затраты на хранение 1 кг товара в сутки $C_1 = 0,240$ руб./сут.

Затраты на завоз одной партии товара, которые не зависят от величины заказа, $C_2 = 132$ руб.

Равномерный спрос товара в сутки, $R = 118$ кг/сут.

Равномерный темп поступления товара в сутки, $k = 437$ кг/сут.

Количество товара, размещаемой на 1 м^3 склада, $U = 5$ кг/ м^3 .

Объём склада, $Q = 24,81$ м^3 .

Фактическая арендная плата за единицу складских емкостей, $\alpha = 2,977$ руб./ $\text{м}^3 \cdot \text{сут}$.

Требуется:

1. Определить объём заказываемой партии товара (X_1), при котором суммарные затраты на завоз и хранение минимальны.

2. В случае необходимости решить, что выгоднее: уменьшить размер заказываемой партии товара или арендовать дополнительные складские ёмкости.

3. Вычислить суточные издержки на завоз и хранение.

Задание 2. Сделайте вывод о целесообразности аренды дополнительных складских емкостей или о необходимости сокращения объема заказываемой партии товара с учетом имеющихся складских емкостей при сравнении фактической $\alpha = \frac{700-\delta}{4000}$ (руб/кг · сутки) и предельной $\lambda = \frac{\delta-400}{4000}$ (руб/кг · сутки) арендной платы за хранение единицы товара в единицу времени.

Вариант 1. $\delta = 501$

Вариант 2. $\delta = 525$

Вариант 3. $\delta = 550$

Вариант 4. $\delta = 559$

Задание 3. Мекки Мессер является владельцем маленькой компании, которая выпускает электрические ножи. В среднем Мекки может производить 150 ножей в день. Дневной спрос на ножи примерно равен 40. Фиксированные издержки производства равны 100 тыс. р., издержки хранения - 8 тыс. р. за нож в год. Какой максимальный заказ следует иметь на складе?

Задание 4. Иванов Иван является владельцем компании, которая изготавливает игрушки. В среднем компания может производить 50 игрушек в день. Дневной спрос на игрушки примерно равен 40. Фиксированные издержки производства равны 100 тыс. р., издержки хранения - 20 тыс. р. за игрушку в год. Какой максимальный заказ следует иметь на складе?

Раздел III

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Тема 7

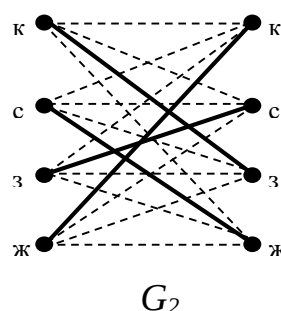
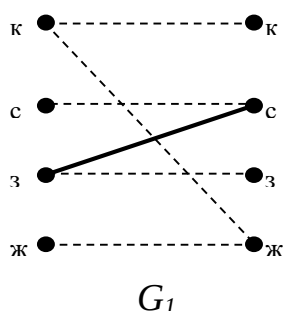
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Решение типовых задач

Пример 1. Красный, синий, желтый и зеленый карандаши лежат в четырех коробках по одному. Цвет карандаша отличается от цвета коробки. Известно, что зеленый карандаш лежит в синей коробке, а красный не лежит в желтой. В какой коробке лежит каждый карандаш?

Решение

Обозначим точками карандаши и коробки. Сплошная линия будет обозначать, что карандаш лежит в соответствующей коробке, а пунктирная, что не лежит. Тогда с учетом задачи имеем G_1 .

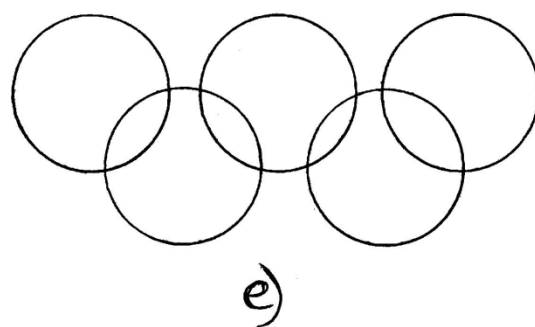
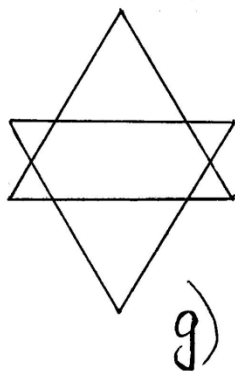
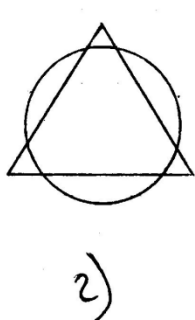
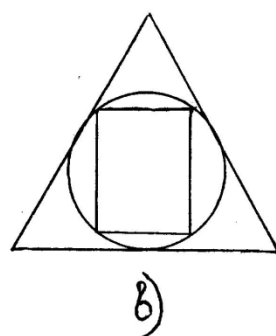
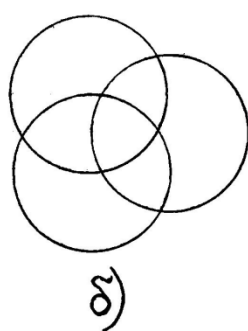
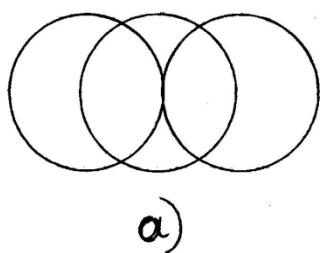
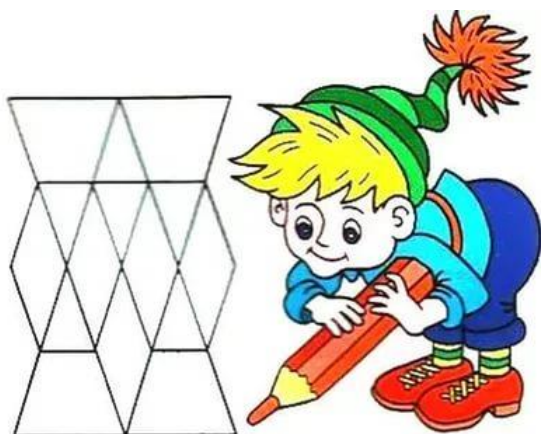
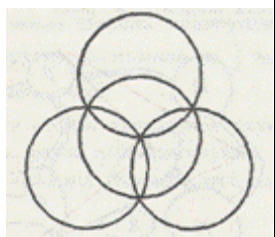
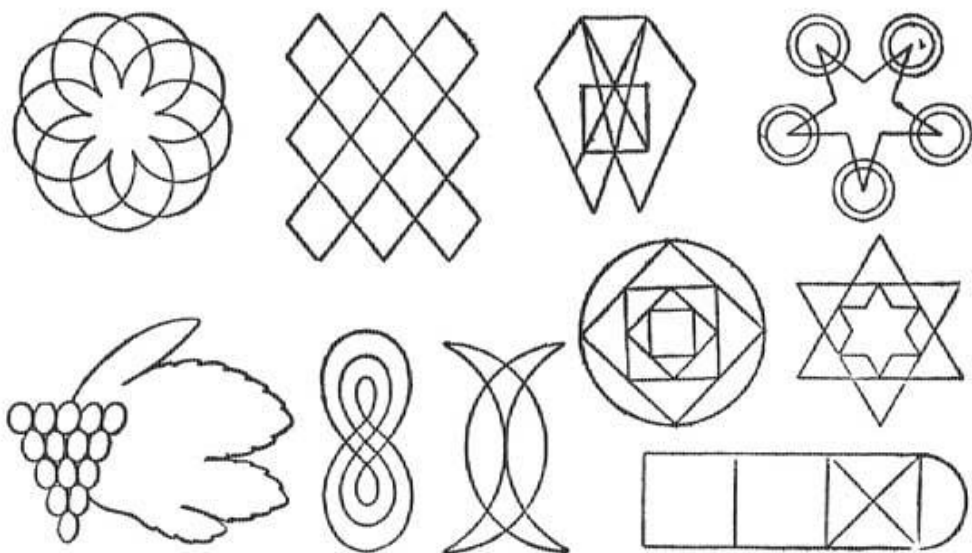


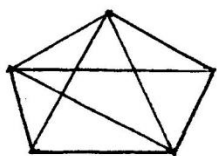
Далее достраиваем граф по следующему правилу: поскольку в короб может лежать ровно один карандаш, то из каждой точки должны выходить одна сплошная линия и три пунктирные. Получается граф G_2 , дающий решение задачи.

Задания для самостоятельной работы

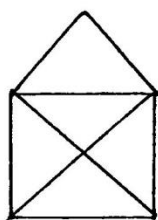
Задание 1. Задачи на проведение эйлеровых линий. Нарисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды по одной и той же линии.

Подсказка. При решении подобных задач необходимо помнить следующее положение. Для того, чтобы на графе имелась цепь, соединяющая АА и ВВ, содержащая все его ребра в точности по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы АА и ВВ были единственными нечетными вершинами, т. е. вершинами с нечетной степенью.

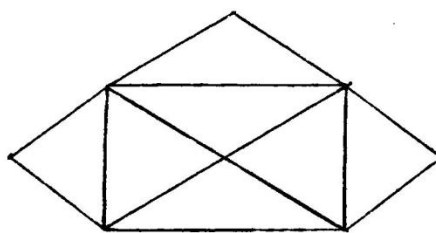




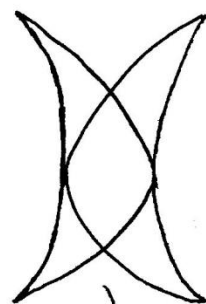
m)



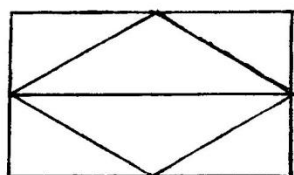
ж)



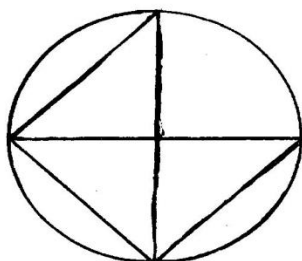
u)



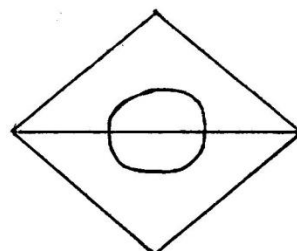
к)



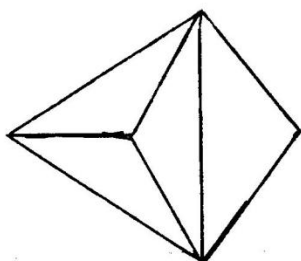
л)



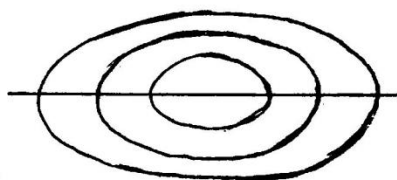
ш)



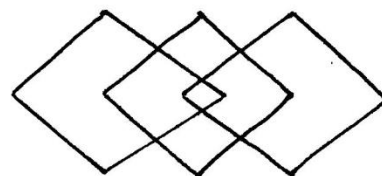
н)



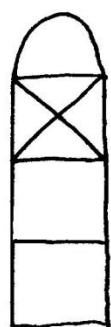
о)



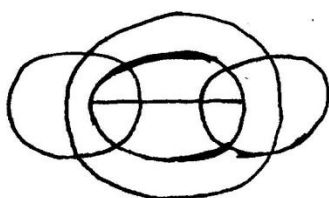
н)



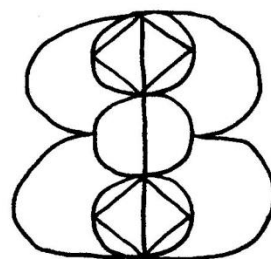
к)



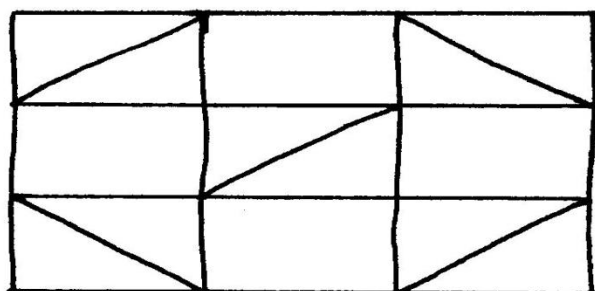
с)



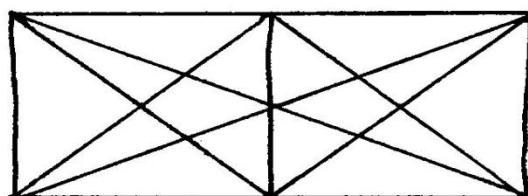
м)



у)



ф)



х)

Задание 2. В первенстве класса по настольному теннису 6 участников: Андрей (А), Борис (Б), Виктор (В), Галина (Г), Дмитрий (Д) и Елена (Е). Первенство проводят по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из остальных 1 раз. К настоящему моменту некоторые игры уже проведены: А сыграл с Б, Г, Е; Б – с А, Г; В – с Г, Д, Е; Г – с А, Б и В. Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько еще осталось?

Задание 3. Между 9 планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс, Марс – Уран.

Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса?

Задание 4. Винни-Пух решил навестить своих друзей: Пятачка, Кролика и Иа. Ему обязательно нужно побывать у каждого из своих друзей и вернуться домой. Но Винни-Пух не любит длинных путешествий. Определите для него кратчайший путь, если известны расстояния между домиками: Винни-Пух – Иа = 60, Иа – Пятачок = 55, Иа – Винни-Пух = 30, Винни-Пух – Пятачок = 40, Кролик – Пятачок = 50, Кролик – Иа = 45 шагов.

Задание 5. Для Вани, Коли и Миши испечены пироги: один с капустой, другой с рисом, третий – с яблоками. Миша не любит пирог с яблоками и не ест с капустой. Ваня не любит пирог с капустой. Кто какой пирог ест?

Задание 6. Беседуют трое друзей: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас белокурый, другой брюнет, третий рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из друзей?

Задание 7. 4 юных филателиста – Митя (М), Толя (Т), Саша (С) и Петя (П) – купили почтовые марки. Каждый из них покупал марки только одной страны, причем двое из них купили российские марки, 1 – болгарские, а 1 – словацкие. Известно, что марки двух разных стран купили М и Т, М и С, П и С, П и М, Т и С. Также известно, что М купил не болгарские марки. Какие марки купил каждый из мальчиков?

Задание 8. На урок в танцкласс пришли слон, волк и лев. партнершами для них выбраны мышка, белочка и лисичка. Помогите учителю расставить их в пары, если белочка боится, что ее съест волк, а слон – что он раздавит мышку. Сколько вариантов составления пар есть у учителя танцев? Перечислите их.

Задание 9. В драматическом кружке решили ставить гоголевского «Ревизора». И тут разгорелся жаркий спор. Все началось с Ляпкина-Тяпкина.

– Ляпкиным-Тяпкиным буду я! – решительно заявил Дима. – С раннего детства я мечтал воплотить этот образ на сцене.

– Ну, хорошо, согласен уступить эту роль, если мне дадут сыграть Хлестакова, – проявил великодушие Гена.

–... А мне... Осипа. – не уступил ему в великодушии Дима.

– Хочу быть Земляником или Городничим, – сказал Вова.

– Нет, Городничим буду я, – хором закричали Алик и Боря. – Или Хлестаковым, – добавили они одновременно.

Удастся ли распределить роли так, чтобы исполнители были довольны?

Задание 10. Необходимо составить фрагмент расписания для одного дня с учетом следующих обстоятельств:

1. учитель истории может дать либо первый, либо второй, либо третий уроки, но только один урок;

2. учитель литературы может дать один, либо второй, либо третий урок;

3. математик готов дать либо только первый, либо только второй урок;

4. преподаватель физкультуры согласен дать только последний урок.

Сколько и каких вариантов расписания, удовлетворяющего всем вышеперечисленным условиям одновременно, может составить завуч школы?

Задание 11. Пятеро девушек поехали в отпуск каждая на своей машине. Все машины были разного цвета. Первой ехала на белой машине американка. За ней на «Тойоте» русская. За француженкой на синей машине ехал желтый «Ситроен». Замыкала колонну англичанка на фиолетовом «Форде». «Плимут» был новее «Бьюика», но менее мощный, поэтому он ехал в середине колонны, а полька восхитительно выглядела в своем брючном костюме. Одна из машин была зеленого цвета.

Кто и на какой машине ехал - указать цвет и марку.

Задание 12. 4 человека взялись выполнять работу маляра, слесаря, кузнеца и штукатура. Каждый будет делать что-то одно. выяснилось, что Антон не будет маляром и не будет слесарем; Алексей не будет кузнецом и не будет маляром; Евгений не будет слесарем и не будет маляром; Дмитрий не будет кузнецом и не будет слесарем. известно

также, что если Антон не будет кузнецом, то Дмитрий не будет маляром.

Кто и какую работу будет выполнять?

Задание 13. В составе экспедиции должно быть 6 специалистов: биолог, врач, синоптик, гидролог, механик и радист. Имеется 8 кандидатов, из которых и нужно выбрать участников экспедиции; условные имена претендентов: А, В, С, D, E, F, G и Н. Обязанности биолога могут исполнять E и G, врача – А и D, синоптика – F и G, гидролога – В и F, радиста – С и D, механика – С и Н. Предусмотрено, что в экспедиции каждый из них будет выполнять только одну обязанность. Кого и в какой должности следует включить в состав экспедицию, если F не может ехать без В, D – без Н и С, С не может ехать вместе с G, А – вместе с В?

Задание 14. В шахматном турнире принимали участие 6 партнеров разных профессий: токарь, слесарь, инженер, учитель, врач и шофер. Известно:

1. в первом туре Андреев играл с врачом, учитель с Борисовым, а Григорьев с Евдокимовым;
2. во втором туре Дмитриев играл с токарем, а врач с Борисовым;
3. в третьем туре Евдокимов играл с инженером;
4. по окончании турнира места распределились так — Борисов I место, Григорьев и инженер поделили II и III места, Дмитриев занял IV Место, а Золотарев и слесарь поделили пятое и шестое места.

Какие профессии имели Григорьев, Дмитриев и Евдокимов?

Задание 15. Три товарища – Иван, Дмитрий и Степан – преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Ленинграда и Киева. Известно:

1. Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;
2. Москвич преподает не физику;
3. Тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию;
4. Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

Задание 16. Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке], но каждая только на одном. Они же владеют разными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно:

1. девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански;

2. Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;

3. Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;

4. девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели;

5. Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

Задание 17. Задача Эйнштейна.

Есть 5 домов. В каждом живет по одному человеку отличной от другого национальности. Каждый жилец пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит животное. Никто из пяти человек не пьет одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Вопрос: Чья рыбка?

Подсказки:

1. Англичанин живет в красном доме.

2. Швед держит собаку.

3. Датчанин пьет чай.

4. Зеленый дом стоит слева от белого.

5. Жилец зеленого дома пьет кофе.

6. Человек, который курит PallMall, держит птицу.

7. Жилец среднего дома пьет молоко.

8. Жилец из желтого дома курит Данхилл.

9. Норвежец живет в первом доме.

10. Курильщик Мальборо живет около того, кто держит кошку.

11. Человек, который содержит лошадь, живет около того, кто курит Данхилл.

12. Курильщик Винфилд пьет пиво.

13. Норвежец живет около голубого дома.

14. Немец курит Ротманс.

15. Курильщик Мальборо живет по соседству с человеком, который пьет воду.

Тема 8 СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Решение типовых задач

Пример 1. По данным табл. 1 планирования торговой деятельности потребительского общества построить сетевой график, для которого определить ранние и поздние сроки событий, критический путь, резервы времени.

Таблица 1

Содержание и длительность работ

№ работы	Содержание	Длительность, дни
1, 2	Изучение отчетных данных	5
1, 3	Изучение перспектив развития экономики	2
2, 3	Планирование общего объема товарооборота	2
3, 4	Планирование товарного обеспечения в общем объеме	1
3, 5	Планирование товарооборота в ассортименте	5
4, 5	Составление плана по труду	3
5, 6	Планирование товарооборота по магазинам	2
5, 8	Расчет доходов	2
5, 9	Планирование запасов по магазинам	3
6, 7	Планирование товарного обеспечения в ассортименте	2
6, 9	Составление плана издержек обращения по статьям, предприятиям	4
7, 9	Планирование запасов в ассортименте	2
8, 9	Уточнение плана издержек обращения с учетом доходов и доведенной прибыли	1

Решение

1. Строим сетевой график (рис. 4) в соответствии с выше указанными требованиями.

Вдоль стрелок проставлена длительность работы в днях.

2. Определяем ранние возможные сроки наступления событий и помещаем их рядом с кружком, обозначающим номер события. Используем при этом формулу

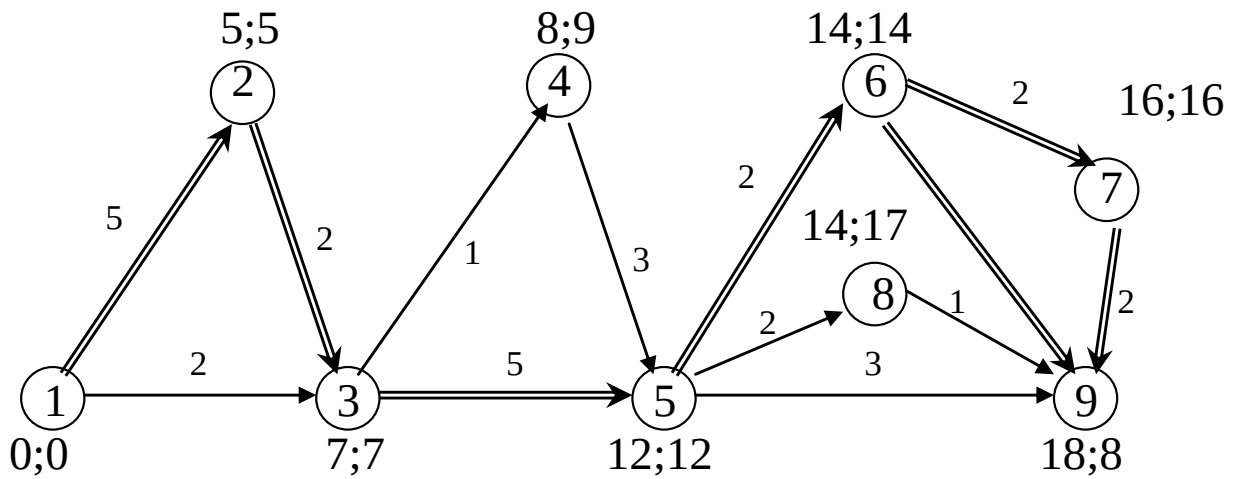


Рис. 4. Сетевой график

$$t_p(j) = t_p(i) + t_{ij},$$

где i – предшествующее событие;

j – последующее событие;

t_{ij} – длительность работы i, j .

Если в событие j входят несколько стрелок – работ, то ранний срок события j определяется формулой

$$t_p(j) = \max[t_p(i) + t_{ij}].$$

Начинаем с первого события, полагая, что его ранний срок равен нулю.

$$t_p(1) = 0$$

$$t_p(6) = 12 + 2 = 14$$

$$t_p(2) = 0 + 5$$

$$t_p(7) = 14 + 2 = 16$$

$$t_p(3) = \max \begin{bmatrix} 5 + 2 \\ 0 + 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$t_p(8) = 12 + 2 = 14$$

$$t_p(4) = 7 + 1 = 8$$

$$t_p(5) = \max \begin{bmatrix} 8 + 3 \\ 7 + 5 \end{bmatrix} = 12$$

$$t_p(9) = \max \begin{bmatrix} 16 + 2 \\ 14 + 4 \\ 14 + 1 \\ 12 + 3 \end{bmatrix} = 18$$

3. Определяем поздние допустимые сроки наступления событий и помещаем их рядом с ранними сроками событий через точку с запятой. Используем при этом формулу

$$t_n(i) = t_n(j) - t_{ij}.$$

Если из события i выходит несколько стрелок – работ (i, j) , то поздний

допустимый срок события i определяется формулой

$$t_n(i) = \min[t_n(j) - t_{ij}].$$

Начинаем с последнего события и берем для него поздний срок, равный раннему.

$$t_n(9) = 18$$

$$t_n(4) = 12 - 3 = 9$$

$$t_n(8) = 18 - 10 = 8$$

$$t_n(3) = \min \begin{bmatrix} 9 - 1 \\ 12 - 5 \end{bmatrix} = 7$$

$$t_n(7) = 18 - 2 = 16$$

$$t_n(6) = \min \begin{bmatrix} 16 - 2 \\ 18 - 4 \end{bmatrix} = 14$$

$$t_n(2) = 7 - 2 = 5$$

$$t_n(5) = \min \begin{bmatrix} 18 - 3 \\ 17 - 2 \\ 14 - 2 \end{bmatrix} = 12$$

$$t_n(1) = \begin{bmatrix} 7 - 2 \\ 5 - 5 \end{bmatrix} = 0$$

4. Определяем длительность (суммарное время) всевозможных полных путей:

- 1) 1 – 3 – 4 – 5 – 9 ————— 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = 9;
- 2) 1 – 3 – 4 – 5 – 8 – 9 ————— 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = 9;
- 3) 1 – 3 – 5 – 9 ————— 2 + 5 + 3 = 10;
- 4) 1 – 3 – 5 – 8 – 9 ————— 2 + 5 + 2 + 1 = 10;
- 5) 1 – 3 – 4 – 5 – 6 – 9 ————— 2 + 1 + 3 + 2 + 4 = 12;
- 6) 1 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 9 ————— 2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 12;
- 7) 1 – 3 – 5 – 6 – 9 ————— 2 + 5 + 2 + 4 = 13;
- 8) 1 – 3 – 5 – 6 – 7 – 9 ————— 2 + 5 + 2 + 2 + 2 = 13;
- 9) 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 9 ————— 5 + 2 + 1 + 3 + 3 = 14;
- 10) 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 8 – 9 ————— 5 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = 14;
- 11) 1 – 2 – 3 – 5 – 9 ————— 5 + 2 + 5 + 3 = 15;
- 12) 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 9 ————— 5 + 2 + 5 + 2 + 1 = 15;
- 13) 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 9 ————— 5 + 2 + 1 + 3 + 2 + 4 = 17;
- 14) 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 9 ————— 5 + 2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 17;
- 15) 1 – 2 – 3 – 5 – 6 – 9 ————— 5 + 2 + 5 + 2 + 4 = 18;
- 16) 1 – 2 – 3 – 5 – 6 – 7 – 9 ————— 5 + 2 + 5 + 2 + 2 + 2 = 18;

5. Находим критический путь, как самый длительный из всех полных путей. Здесь таких путей два:

$$1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 9 \text{ ————— } 18 \text{ дней;}$$

$$1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 7 - 9 \text{ ————— } 18 \text{ дней.}$$

Значит, данный сетевой график имеет два критических пути. Выделим их на график двойной линией.

6. Определяем резервы времени для всех работ.

Строим таблицу резервов времени (табл. 2).

Таблица 2

Резервы времени

Работа i, j	t_{ij}	$t_p(i)$	$t_n(i)$	$t_p(j)$	$t_n(j)$	$ПР$	$ГР$	$СР$	$НР$
1, 2	5	0	0	5	5	0	0	0	0
1, 3	2	0	0	7	7	5	5	5	5
2, 3	2	5	5	7	7	0	0	0	0
3, 4	1	7	7	8	9	1	1	0	0
3, 5	0	7	7	12	5	0	0	0	0
4, 5	3	8	9	12	12	1	0	1	0
5, 6	2	12	12	14	14	0	0	0	0
5, 8	2	12	12	14	17	3	3	0	0
5, 9	3	12	12	18	18	3	3	3	3
6, 7	2	14	14	16	16	0	0	0	0
6, 9	4	14	14	18	18	0	0	0	0
7, 9	2	16	16	18	18	0	0	0	0
8, 9	1	14	17	18	18	3	0	3	0

Примечание. Всегда выполняются неравенства

$$НР \leq ГР \leq ПР \text{ и } НР \leq СР \leq ПР.$$

Полный резерв (ПР) означает величину максимально возможного резерва времени у исполнителя работы (i, j) , которую он может получить, когда исполнители предшествующих работ позволяют ему начать свою работу в ранний срок, а он предполагает закончить свою работу в поздний допустимый срок.

$$ПР = t_n(j) - t_p(i) - t_{ij}.$$

Гарантийный резерв (ГР) означает для исполнителя работы резерв времени, который он имеет, когда исполнители предшествующих работ заканчивают их в неудобные для него поздние допустимые сроки, но и он сдает свою работу в поздний срок.

$$ГР = t_n(j) - t_n(i) - t_{ij}.$$

Свободный резерв (СР) рассчитывается при условии, что все исполнители заканчивают работы в ранние возможные сроки.

$$СР = t_p(j) - t_p(i) - t_{ij}.$$

Независимый резерв (НР) означает запас времени, который имеет исполнитель, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобные для него поздние сроки, а он заканчивает свою работу в ранний срок.

$$HP = t_p(j) - t_n(i) - t_{ij}.$$

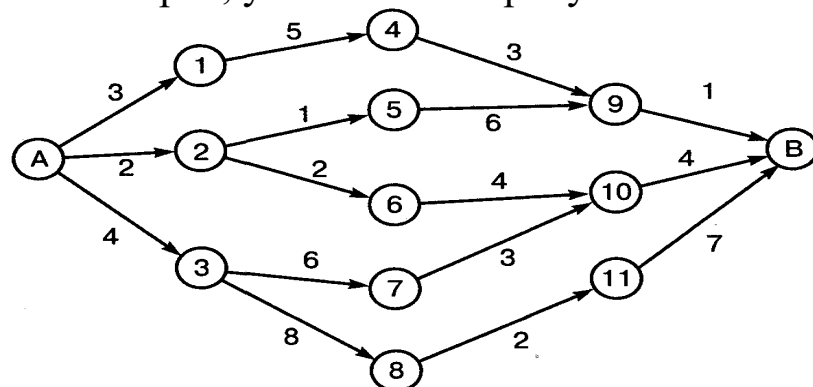
Все резервы времени для работ, лежащих на критическом пути, равны нулю.

Если расчетная формула дает отрицательное значение для HP , то оно заменяется нулем.

Таким образом, для нашей задачи из 13 работ, указанных на сетевом графике, только 6 имеют резервы времени.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Пожарной службе необходимо определить кратчайший путь от гаража (пункт А) до нефтеперерабатывающей базы (пункт В) по данным в километрах, указанным на рисунке.

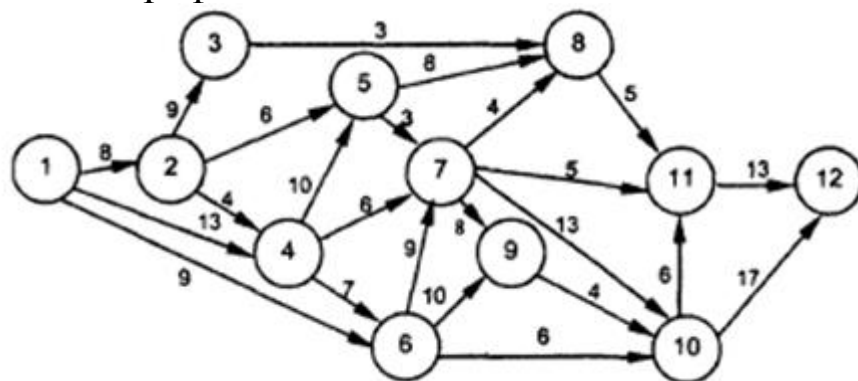


Задание 2. На основе имеющихся данных построить сетевой граф и определить кратчайший путь.

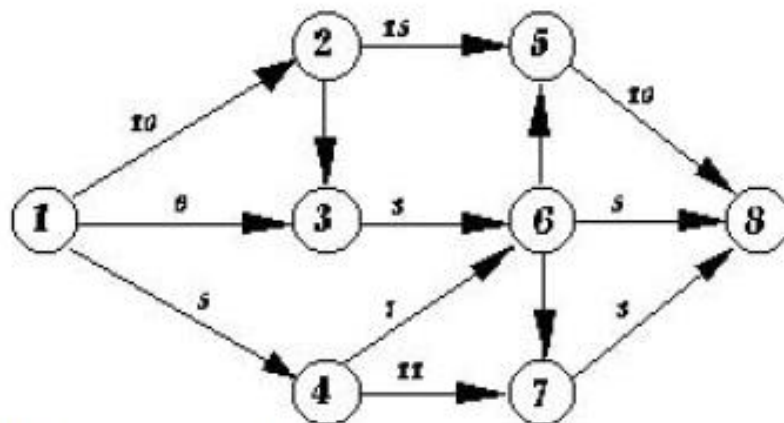
Вариант 1		Вариант 2	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
0-1	1	0-1	8
0-2	2	0-3	13
0-3	1	0-5	9
1-4	10	1-2	9
1-5	1	1-3	4
2-5	4	1-4	6
2-7	3	2-7	3
3-6	7	3-4	10
3-7	5	3-5	7
3-10	4	3-6	6
4-8	8	4-6	3

Вариант 1		Вариант 2	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
5-8	7	4-7	8
6-7	6	5-6	9
6-10	6	5-8	10
7-8	5	5-9	6
7-9	3	6-7	4
7-10	2	6-8	8
8-9	6	6-9	9
9-10	10	6-10	5
9-11	4	7-10	5
10-11	3	8-9	4
		9-10	6
		9-11	17
		10-11	13

Задание 3. Рассчитайте кратчайший и критический пути для следующего сетевого графа:



Задание 4. Найти критический путь в сети. Рассчитать резервы времени для событий 4 и 5.



Определить, изменится ли длительность выполнения операции, если в сети:

а) длительность работы 2-5 возрастет до 18 дней;

б) длительность работы 6-8 снизится до 3 дней.

Задание 5. На основе имеющихся данных построить сетевой граф и определить кратчайший и критический пути.

<i>Вариант 1</i>		<i>Вариант 2</i>		<i>Вариант 3</i>	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
1-2	1	1-2	1	0-1	2
1-3	2	1-3	2	0-2	3
2-4	1	2-3	1	0-3	1
3-7	3	2-4	3	1-4	5
4-5	2	3-4	2	2-5	4
4-6	6	3-5	1	3-5	5
4-7	10	3-6	4	3-6	1
5-6	7	4-5	3	4-6	6
6-8	4	4-7	5	5-6	1
7-8	3	5-6	3	4-7	1
7-10	1	5-7	7	6-7	8
8-9	1	6-7	5	6-8	10
9-10	5	6-8	2	7-9	1
9-11	2	7-8	6	8-9	3
10-12	1				
10-13	2				
11-12	4				
11-14	2				
12-13	2				
13-14	1				

Задание 6. На основе имеющихся данных построить сетевой граф, для которого определить ранние и поздние сроки событий, кратчайший и критический путь.

<i>Вариант 1</i>		<i>Вариант 2</i>		<i>Вариант 3</i>	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
1-2	20	0-1	30	0-1	18
1-3	15	0-2	20	0-2	45
1-4	25	0-4	70	1-3	12
2-3	10	1-3	20	1-4	30
2-5	20	2-4	80	2-5	20
2-7	40	2-6	90	3-6	20
3-4	8	3-4	10	3-8	40
3-6	30	3-5	50	4-6	25
4-6	20	4-5	30	5-6	35

<i>Вариант 1</i>		<i>Вариант 2</i>		<i>Вариант 3</i>	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
5-6	6	4-6	40	5-7	35
5-7	9	4-7	80	6-7	42
6-7	12	5-7	40	7-8	10
		6-7	20		

<i>Вариант 4</i>		<i>Вариант 5</i>		<i>Вариант 6</i>	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
1-2	30	1-2	8	0-1	4
1-3	35	1-3	2	0-2	12
2-3	25	1-5	6	03	7
2-4	12	2-4	5	1-4	3
2-5	18	2-6	4	1-5	1
3-4	9	3-5	7	2-3	5
3-6	22	3-6	10	2-5	9
4-5	15	4-8	4	2-7	8
4-6	14	5-6	12	3-8	5
5-7	17	5-7	9	4-6	10
5-9	19	6-8	3	4-9	15
6-8	17	6-9	5	5-6	6
6-9	16	7-10	3	6-9	5
7-9	14	8-10	6	7-8	4
8-9	13	9-10	4	7-9	2
				8-9	8

Задание 7. По данным планирования торговой деятельности потребительского общества построить сетевой график, для которого определить ранние и поздние сроки событий, критический путь, резервы времени.

№ работы	Содержание	Длительность, дни
1, 2	Изучение отчетных данных	3
1, 3	Изучение перспектив развития экономики	3
2, 3	Планирование общего объема товарооборота	3
3, 4	Планирование товарного обеспечения в общем объеме	2
3, 5	Планирование товарооборота в ассортименте	4
4, 5	Составление плана по труду	2
5, 6	Планирование товарооборота по магазинам	4
5, 8	Расчет доходов	3

№ работы	Содержание	Длительность, дни
5, 9	Планирование запасов по магазинам	4
6, 7	Планирование товарного обеспечения в ассортименте	3
6, 9	Составление плана издержек обращения по статьям, предприятиям	5
7, 9	Планирование запасов в ассортименте	3
8, 9	Уточнение плана издержек обращения с учетом доходов и доведенной прибыли	1

Задание 8. По данным планирования деятельности организации построить сетевой график, для которого определить ранние и поздние сроки событий, резервы времени.

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
0-1	18	1-2	10	0-1	2
0-2	30	1-3	4	0-2	3
0-3	20	1-4	6	1-3	5
1-4	22	2-5	9	1-4	4
1-9	12	3-4	7	2-5	6
2-8	30	3-6	8	3-6	7
3-5	25	4-5	3	3-8	5
3-6	9	4-6	10	4-5	1
4-9	30	4-7	4	4-6	2
5-10	15	5-8	5	5-6	4
6-7	20	6-7	9	5-9	6
6-10	5	6-9	7	6-7	3
7-8	35	7-8	12	7-8	2
8-11	32	7-9	6	7-9	1
9-11	22	7-10	8	8-10	4
10-11	42	8-10	9	9-10	1
		9-10	11		

Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
1-2	5	1-2	7	0-1	25
1-3	7	1-4	8	0-2	14
1-5	4	1-5	4	0-6	16
2-4	3	2-3	1	1-3	18
2-6	8	2-4	3	1-5	16

Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
3-4	3	3-8	4	2-3	28
3-5	1	3-9	7	2-4	23
3-8	2	4-6	8	3-4	12
3-9	7	4-7	9	3-5	14
4-7	12	5-6	7	4-5	5
5-10	5	5-8	12	4-6	5
6-11	7	6-7	5	5-6	14
7-9	4	7-8	3	5-7	25
7-11	8	8-9	6	5-8	17
8-9	11	8-10	7	6-8	34
8-10	4	9-10	5	7-8	16
8-11	4				
9-11	4				
10-11	7				

Вариант 7					
№ работы	Длительность	№ работы	Длительность	№ работы	Длительность
0-1	3	4-8	4	10-13	7
0-2	20	5-12	1	11-13	7
0-3	11	5-17	7	11-15	9
1-3	4	6-9	6	12-15	9
1-4	9	6-10	15	13-14	6
2-5	10	7-10	3	13-16	4
2-8	4	7-11	2	14-16	10
3-6	12	8-11	3	15-16	7
3-7	7	8-12	2	16-17	3
4-7	9	9-14	1	17-18	5

Задание 9. Предприятие решило сократить время выпуска новой продукции до 70 дней. Затраты на проведение работ в нормальном и срочном режимах указаны в таблице. Определить, каковы будут затраты в обоих вариантах выполнения работ.

Работа	Нормальный режим		Срочный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс.руб.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс.руб.
0-1	20	35	10	95
0-2	32	50	12	110
1-2	12	15	2	45
1-3	7	10	2	50

Работа	Нормальный режим		Срочный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс.руб.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс.руб.
2-7	7	10	2	25
3-4	26	50	16	70
3-5	13	15	8	45
4-6	22	40	12	80
5-6	20	30	15	50
6-7	13	25	8	50
7-8	11	20	6	65
Итого	-	300	-	685

Задание 10. Предприятие решило сократить время выпуска новой продукции до 18 дней. Затраты на проведение работ в нормальном и срочном режимах указаны в таблице. Определить, каковы будут затраты в обоих вариантах выполнения работ.

Работа	Нормальный режим		Срочный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс.руб.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс.руб.
1-2	3	6	2	10
1-3	5	10	3	12
1-4	4	8	2	16
2-5	10	25	8	32
3-5	8	20	6	24
3-6	15	25	12	36
4-6	13	26	10	30
5-7	3	15	6	24
6-7	4	12	3	15

Тема 9 МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Решение типовых задач

Пример 1. В торгово-розничную сеть поступило 3 вида взаимозаменяемой продукции разных производителей A_1, A_2, A_3 . Предположим, что покупатели приобретают только один из них. Пусть в среднем они стремятся поменять его не более одного раза в год, и вероятности таких изменений постоянны.

Результаты маркетинговых исследований покупательского спроса на продукцию дали следующее процентное соотношение:

X_1 % покупателей продукции A_1 переходят на A_2 ,

X_2 % покупателей продукции A_2 переходят на A_3 ,

X_3 % покупателей продукции A_3 переходят на A_1 ,

(где $X_1 = 70,7$, $X_2 = 2,6$, $X_3 = 53$).

Требуется:

1. Построить граф состояний.
2. Составить матрицу переходных вероятностей для средних годовых изменений.
3. Предположить, что общее число покупателей постоянно, и определить, какая доля из их числа будет покупать продукцию A_1, A_2 и A_3 через 2 года.
4. Определить какая продукция будет пользоваться наибольшим спросом.

Решение

Построим граф состояний.

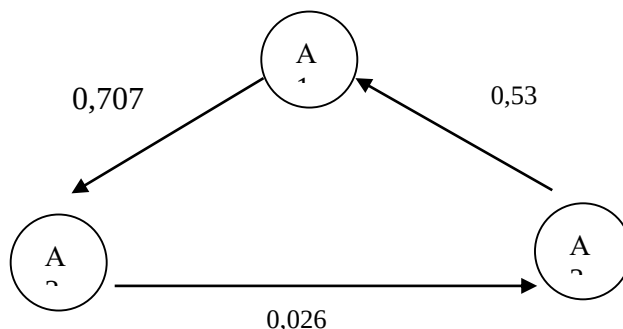


Рис. 4. Граф состояний системы A с заданными вероятностями перехода

Составим матрицу переходных вероятностей:

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1-0,707 & 0,707 & 0 \\ 0 & 1-0,026 & 0,026 \\ 0,53 & 0 & 1-0,53 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,293 & 0,707 & 0 \\ 0 & 0,974 & 0,026 \\ 0,53 & 0 & 0,47 \end{vmatrix}.$$

Зададим вектор начальных вероятностей: $P(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $P_1(0)=1$,

$P_2(0)=1$ и $P_3(0)=1$.

Определим вероятности состояния $P_i(k)$ после первого шага (после первого года):

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{11} + P_2(0) \cdot P_{21} + P_3(0) \cdot P_{31} = 1 \cdot 0,293 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,53 = 0,823;$$

$$P_2(1) = P_1(0) \cdot P_{12} + P_2(0) \cdot P_{22} + P_3(0) \cdot P_{32} = 1 \cdot 0,707 + 1 \cdot 0,974 + 1 \cdot 0 = 1,681;$$

$$P_3(1) = P_1(0) \cdot P_{13} + P_2(0) \cdot P_{23} + P_3(0) \cdot P_{33} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,026 + 1 \cdot 0,47 = 0,496.$$

И определим вероятности состояний после второго шага (после второго года):

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot P_{11} + P_2(1) \cdot P_{21} + P_3(1) \cdot P_{31} = 0,823 \cdot 0,293 + 1,681 \cdot 0 + 0,496 \cdot 0,53 = 0,241 + 0 + 0,263 = 0,504;$$

$$P_2(2) = P_1(1) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot P_{22} + P_3(1) \cdot P_{32} = 0,823 \cdot 0,707 + 1,681 \cdot 0,974 + 0,496 \cdot 0 = 0,582 + 1,637 + 0 = 2,219;$$

$$P_3(2) = P_1(1) \cdot P_{13} + P_2(1) \cdot P_{23} + P_3(1) \cdot P_{33} = 0,823 \cdot 0 + 1,681 \cdot 0,026 + 0,496 \cdot 0,47 = 0 + 0,044 + 0,233 = 0,277.$$

Можно сделать вывод, что через 2 года только 50% покупателей будут покупать продукцию А1, около 28% покупателей – А3, и число покупателей продукции А2 увеличится в 2,2 раза.

Следовательно продукция А2 будет пользоваться наибольшим спросом.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. В торгово-розничную сеть поступило 3 вида взаимозаменяемой продукции разных производителей А1, А2, А3. Предположим, что покупатели приобретают только один из них. Пусть в среднем они стремятся поменять его не более одного раза в год, и вероятности таких изменений постоянны.

Результаты маркетинговых исследований покупательского спроса на продукцию дали следующее процентное соотношение:

а) $A1 \rightarrow A2$, $A2 \rightarrow A3$, $A3 \rightarrow A1$ (Это означает, что X_1 % покупателей продукции $A1$ переходят на $A2$, X_2 % покупателей продукции $A2$ переходят на $A3$, X_3 % покупателей продукции $A3$ переходят на $A1$);

б) $A1 \rightarrow A3$, $A2 \rightarrow A1$, $A3 \rightarrow A2$.

Построить граф состояний. Предположить, что общее число покупателей постоянно, и определить, какая доля из их числа будет покупать продукцию $A1$, $A2$ и $A3$ через 2 года.

Сделайте вывод, какая продукция будет пользоваться наибольшим успехом.

Варианты заданий приведены в табл. 2.

Таблица 2

Варианты заданий

№ варианта	X_1	X_2	X_3
1	10	23	9
2	36	17	22
3	5	10	22
4	24	20	21
5	30	5	45
6	22	16	31
7	10	24	10
8	7	23	16
9	17	22	33
10	47	20	16
11	23	18	23
12	12	78	5
13	22	16	30
14	26	22	27
15	14	34	14

Задание 2. В торгово-розничную сеть поступило 4 вида взаимозаменяемой продукции разных производителей $A1$, $A2$, $A3$ и $A4$. Предположим, что покупатели приобретают только один из них. Пусть в среднем они стремятся поменять его не более одного раза в год, и вероятности таких изменений постоянны.

Результаты маркетинговых исследований покупательского спроса на продукцию дали следующее процентное соотношение:

а) $A1 \rightarrow A2$, $A1 \rightarrow A4$, $A2 \rightarrow A4$, $A3 \rightarrow A1$, $A3 \rightarrow A2$, $A4 \rightarrow A3$ (Это означает, что X_1 % покупателей продукции $A1$ переходят на $A2$, X_2 % по-

купателей продукции А1 переходят на А4, X_3 % покупателей продукции А2 переходят на А4, X_4 % покупателей продукции А3 переходят на А1, X_5 % покупателей продукции А3 переходят на А2 и X_6 % покупателей продукции А4 переходят на А3).

б) $A1 \rightarrow A2$, $A1 \rightarrow A4$, $A2 \rightarrow A3$, $A3 \rightarrow A1$, $A3 \rightarrow A4$, $A4 \rightarrow A2$.

в) $A1 \rightarrow A3$, $A2 \rightarrow A1$, $A3 \rightarrow A2$, $A3 \rightarrow A4$, $A4 \rightarrow A1$, $A4 \rightarrow A2$.

г) $A1 \rightarrow A2$, $A1 \rightarrow A3$, $A2 \rightarrow A4$, $A3 \rightarrow A1$, $A3 \rightarrow A4$, $A4 \rightarrow A3$.

Построить граф состояний. Предположить, что общее число покупателей постоянно, и определить, какая доля из их числа будет покупать продукцию А1, А2, А3 и А4 через 2 года. Определить какая продукция будет пользоваться наибольшим спросом.

Варианты заданий приведены в таблице 3.

Таблица 3

Варианты заданий

№ варианта	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	3	6	13	3	6	10
2	25	9	10	11	1	27
3	10	3	10	6	8	4
4	45	6	3	8	12	21
5	1	4	28	32	9	9
6	7	16	30	22	10	7
7	33	10	15	12	15	9
8	20	7	14	27	18	19
9	5	20	16	5	11	10
10	15	12	2	19	4	23
11	13	32	4	31	9	10
12	40	31	10	5	11	26
13	22	9	19	25	35	4
14	10	30	3	16	16	11
15	54	22	43	22	28	17

Тема 10 МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

Решение типовых задач

Пример 1. Пусть А и В – две конкурирующие фирмы.

А – старая фирма, монопольно распоряжающаяся на рынке.

В – новая фирма, которая хочет внедриться на рынок и отобрать у А часть спроса.

Пусть у каждого игрока имеется по три стратегии (способы производства и реализации продукции).

А \ В	В₁	В₂	В₃
	В₁	В₂	В₃
А₁	0,5	0,6	0,8
А₂	0,9	0,7	0,8
А₃	0,7	0,5	0,6

Решение

В качестве элемента платежной матрицы a_{ij} выступает доля спроса для фирмы А, если А выбирает стратегию A_i , а фирма В – стратегию B_j .

Определим нижнюю цену игры α и верхнюю цену игры β :

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}).$$

$$\alpha_1 = \min_j a_{1j} = \min(0,5; 0,6; 0,8) = 0,5;$$

$$\alpha_2 = \min_j a_{2j} = \min(0,9; 0,7; 0,8) = 0,7;$$

$$\alpha_3 = \min_j a_{3j} = \min(0,7; 0,5; 0,6) = 0,5;$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i;$$

$$\alpha = \max(0,5; 0,7; 0,5) = 0,7;$$

$\alpha = 0,7$ - соответствует стратегии A_2 .

$$\beta = \min_j (\max_i a_{ij}).$$

$$\beta_1 = \max_i a_{i1} = \max(0,5; 0,9; 0,7) = 0,9;$$

$$\beta_2 = \max_i a_{i2} = \max(0,6; 0,7; 0,5) = 0,7;$$

$$\beta_3 = \max_i a_{i3} = \max(0,8; 0,8; 0,6) = 0,8;$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min(0,9; 0,7; 0,8) = 0,7.$$

$\beta = 0,7$ - соответствует стратегии B_2 .

$\alpha = \beta = 0,7$ - цена игры.

A \ B	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	0,7	0,8	0,7
A_3	0,7	0,5	0,6	0,5
β_i	0,9	0,7	0,8	

Это игра с нулевой суммой и решается в чистых стратегиях, т.е. фирма А выбирает стратегию A_2 , а фирма В – стратегию B_2 и гарантированная доля спроса фирмы А равна 0,7, а фирмы В – соответственно 0,3.

Пример 2. Пусть имеется неходовой товар, который решено уценить, но неизвестно на сколько процентов. При этом имеется некоторый набор стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$, заключающийся в уменьшении цены товара на различное число процентов. Считается, что эластичность данного товара неизвестна.

A \ E	E_1	E_2	E_3
A_1	40	50	70
A_2	30	50	90
A_3	20	60	80

Решение

Рассмотрим различные примеры эластичности: $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Зная ситуацию на текущий момент, можно вычислить сумму выручки от реализации партии товара, которая получается при использо-

вании стратегии A_i , если эластичность при этом равна E_j . Тогда платежная матрица имеет вид:

$A \backslash E$	E_1	E_2	...	E_J	...	E_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Пусть стратегии такие:

A_1 - снижение цены на товар на 10%;

A_2 - снижение цены на товар на 20%;

A_3 - снижение цены на товар на 30%;

$E_1 = 0,5$ - для малоэластичных товаров;

$E_2 = 1$ - для среднеэластичных товаров;

$E_3 = 1,5$ - для высокоэластичных товаров.

$A \backslash E$	E_1	E_2	E_3	α_i	β_i	γ_i
A_1	40	50	70	40	70	55
A_2	30	50	90	30	90	60
A_3	20	60	80	20	80	50

Решаем данную задачу с позиции различных подходов.

1. Подход с позиции "крайнего пессимизма".

Считается, что при выборе любой стратегии A_i эластичность товара будет самая неблагоприятная и выручка α_i - минимально возможной.

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}).$$

$$\alpha_1 = \min_j a_{1j} = \min(40; 50; 70) = 40;$$

$$\alpha_2 = \min_j a_{2j} = \min(30; 50; 90) = 30;$$

$$\alpha_3 = \min_j a_{3j} = \min(20; 60; 80) = 20;$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max(40; 30; 20) = 40;$$

Величина $\alpha = 40$ соответствует стратегии A_1 . Ее нужно выбрать с точки зрения данного подхода. Заметим, что при этом выручка может быть и 50 единиц, и 70 единиц, но не менее 40, а, выбирая другую стратегию, например A_2 , можно иметь выручку в благоприятном случае 90 единиц, но в неблагоприятном - всего 30 единиц, что хуже, чем гарантированный результат при стратегии A_1 .

2. Подход с позиции "крайнего оптимизма".

Он заключается в том, что при выборе любой стратегии A_i эластичность будет наиболее благоприятной и выручка β наибольшая, то есть

$$\beta = \max_i (\max_j a_{ij}).$$

$$\beta_1 = \max_j a_{1j} = \max(40; 50; 70) = 70;$$

$$\beta_2 = \max_j a_{2j} = \max(30; 50; 90) = 90;$$

$$\beta_3 = \max_j a_{3j} = \max(20; 60; 80) = 80;$$

$$\beta = \max_i \beta_i = \max(70; 90; 80) = 90.$$

Величина $\beta = 90$ соответствует стратегии A_2 , при этом товар высокоэластичный. Эта стратегия отражает надежду на самый лучший исход из всех возможных.

3. Подход с позиции "пессимизма-оптимизма"

Рассмотрим величину H :

$$H = \max_i [(1 - \lambda) \alpha_i + \lambda \beta_i],$$

где λ - числовой параметр, $0 < \lambda < 1$.

Предлагается выбирать стратегию, соответствующую величине H .

При $\lambda = 0$, $H = \max_i \alpha_i = \alpha$ и этот подход превращается в подход с позиции крайнего пессимизма.

При $\lambda = 1$, $H = \max_i \beta_i = \beta$ и этот подход превращается в подход с

позиции крайнего оптимизма.

Вообще, величина H при изменении λ от 0 до 1 непрерывно изменяется от α до β и выбор некоторого промежуточного λ соответствует сочетанию пессимизма и оптимизма при выборе стратегии. Возьмем, например, $\lambda = 0,5$ и вычислим

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\beta_i,$$

$$\gamma = \max_i \gamma_i.$$

Стратегию, при которой достигается величина γ , будем называть соответствующей подходу с позиции пессимизма-оптимизма. Итак,

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{1}{2}(40 + 70) = 55;$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2) = \frac{1}{2}(90 + 30) = 60;$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \beta_3) = \frac{1}{2}(80 + 20) = 50;$$

$$\gamma = \max_i \gamma_i = \max(55; 60; 50) = 60.$$

Величина $\gamma = 60$ соответствует стратегии A_2 .

Таким образом,

$\alpha = 40$ соответствует стратегии A_1 с позиции крайнего пессимизма;

$\beta = 90$ соответствует стратегии A_2 с позиции крайнего оптимизма;

$\gamma = 60$ соответствует стратегии A_2 с позиции пессимизма-оптимизма.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Выберите стратегии с позиций крайнего пессимизма, крайнего оптимизма и оптимизма-пессимизма для следующей платежной таблицы. Укажите соответствующие выигрыши.

Вариант 1.

	ε_1	ε_2	ε_3
A_1	11	21	119
A_2	109	119	129
A_3	59	69	139

Вариант 2.

	ε_1	ε_2	ε_3
A_1	60	70	70
A_2	60	70	80
A_3	10	20	90

Вариант 3.

	ε_1	ε_2	ε_3
A_1	69	79	61
A_2	51	61	71
A_3	19	11	81

4. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

4.1. Список основной литературы

1. Моделирование социальных явлений и процессов с применением математических методов: учеб. пос. / Г.В.Осипов и др.; под общ. ред. В.А.Садовниченко - М.: Норма: НИЦ ИНФРА-М, 2014 - 192с. (ЭБС Инфра-М)

4.2. Список дополнительной литературы

1. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование: практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 140 с. (ЭБС Инфра-М)
2. Тавокин, Е.П. Исследование социально-экономических и политических процессов: учебное пособие / Е.П. Тавокин. - 2-е изд., перер. и доп. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 216 с. (ЭБС «Инфра-М»)

4.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Таблица 3. Перечень информационных ресурсов

№ п/п	Наименование	Адрес
1.	Экономическая теория	http://econteor.ru/mak-roekonomika/opebr.php?pg=1xx4
2.	Электронно-библиотечная система	http://znanium.com/

4.4. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля) и самостоятельной работы

1. Методические рекомендации по выполнению контрольных работ и рефератов для всех форм обучения по направлениям подготовки: 38.03.04 Государственное и муниципальное управление; 38.03.03 Управление персоналом; 43.03.01 Сервис; 38.04.04 Государственное и муниципальное управление; 38.04.03 Управление персоналом / Сост. И.Э.Толстова, О.С. Ковалёва, О.Г. Антошкина.-3-е изд.- Новосибирск: НГАУ, 2017. - 24 с.

Составитель
Макурина Юлия Александровна

Методические рекомендации
для проведения практических занятий и самостоятельной работы студен-
тов
(для студентов всех форм обучения
по направлению подготовки 38.03.04 Государственное и муниципальное управ-
ление)

Объем 1,7 уч. – изд. л.

Новосибирский государственный аграрный университет
630039, Новосибирск. ул. Добролюбова, 160