ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Институт ветеринарной медицины и биотехнологии
Кафедра ветеринарной генетики и биотехнологии

БИОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И МОДЕЛИРОВАНИЯ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ И БИОЛОГИИ

Учебное пособие

Новосибирск 2024

УДК 57.087.1 + 63 : 519.87 (075)

ББК 28.0 + 40 : 87.256.631, Я 73

Составители:

д-р биол. наук, доцент Е.В. Камалдинов,
д-р биол. наук, проф. С.Г. Куликова,
д-р биол. наук, доцент М.Л. Кочнева,
к-т биол. наук, доцент К.Н. Нарожных,
д-р с.-х. наук, доцент В.В.Гарт,
ст. преподаватель А.Ф. Петров

Рецензент: К.В. Жучаев, доктор биол. наук, профессор

Биометрические методы обработки экспериментальных данных и моделирования в сельском хозяйстве и биологии: учебное пособие. Е.В. Камалдинов, С.Г. Куликова, М.Л. Кочнева, К.Н. Нарожных, В.В. Гарт, А.Ф. Петров; Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск, 2024. – 165 с.

В учебном пособии представлены материалы по изучению дисциплин, связанных с биометрической обработкой экспериментальных данных и построением моделей. Представлены вопросы для выполнения самостоятельной и контрольных работ. Пособие предназначено для студентов по направлениям подготовки (уровни бакалавриата и магистратуры): Биология, Зоотехния, Ветеринарно-санитарная экспертиза, Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции, Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания всех форм обучения.

Рекомендовано к изданию учебно-методическими советами института ветеринарной медицины и биотехнологии НГАУ (протокол № 4 от 22 апреля 2024 г.) и института экологической и пищевой биотехнологии (протокол № 3 от 10 апреля 2024 г.)

Введение

Биологическая статистика является отраслью знаний, позволяющей применять статистические методы в биологии с целью анализа признаков с непрерывным и дискретным характером распределения, нахождения существующих закономерностей и принятия решений. Термин «Биостатистика» (Биологическая статистика, биометрия) состоит из двух составляющих: «био» (от др. -греч. *βίος* – жизнь) и «статистика» (от лат. *status* – состояние или состояние дел). Термин «статистика» впервые введён в обиход в 1946 г. немецким учёным Готфридом Ахенвалем (Gottfried Achenwall, 1719-1772) и применялся преимущественно в области права. Первое упоминание термина «*Biometry*» (биометрия) принадлежит английскому исследователю Фрэнсису Гальтону (Francis Galton, 1822-1911). Несмотря на формальное использование терминологии, некоторые особенности современных статистических методов были известны в Древнем Китае и Риме. В прошлом, потребность учёта имущества граждан, сравнение военного потенциала или проведение переписи населения, как и сейчас, было насущной потребностью общества, без удовлетворения которой было бы сложно представить себе его полноценное развитие. Именно тогда были заложены первые предпосылки широкого использования методов статистики, и разрабатывалась математическая основа для этого. Примером тому может служить арифметический треугольник Янга Хуэея в (Yang Hui, 1238-1298), который только в 17-м веке был заново предложен Блезом Паскалем.

Особую роль в использовании статистических методов в биологии сыграли английские учёные Кэмбриджского университета и Университетского колледжа Лондона. Так, Фрэнсис Гальтон (Francis Galton, 1822-1911), как и его двоюродный брат Чарльз Роберт Дарвин (Charles Robert Darwin, 1809-1882), наряду с изучением метеорологии и антропологии, увлёкся вопросами наследственности и теории эволюции. В качестве его особых заслуг перед биостатистикой можно отнести разработку основ корреляционного анализа.

Продолжателем дела Фрэнсиса Гальтона стал Карл Пирсон (Karl (Carl) Pearson, 1857-1936), который внёс неоценимый вклад в развитие методов оценки изменчивости признаков, линейного и нелинейного регрессионного анализа и считается отцом основателем математической статистики. Будучи математиком, Пирсону удалось выстроить стройную систему представлений о статистическом анализе и его практическом применении в области биологии, медицины и евгеники. Это явилось предпосылкой для открытия им в сотрудничестве с Гальтоном журнала «Biometrika» в 1901г. На таком названии настоял Фрэнсис Эджворт (Francis Ysidro Edgeworth, 1845-1926) – ирландский философ, статистик и политик, внёсший вклад в развитие и использование методов математической статистики в экономике.

Последующее развитие биостатистики принято связывать с английским статистиком сэром Рональдом Айльмером Фишером (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890-1962). Им были разработаны теоретические аспекты выборочных распределений, методы дисперсионного и дискриминантного анализов, максимального правдоподобия. Особый интерес Фишер проявлял к биологии, публикуя научные труды о применении корреляционного анализа при оценке связей между некоторыми признаками близких родственников.

Существенный прорыв, по словам Фишера, произвёл Уильям Сили Госсет (William Sealy Gosset, 1876-1937), разработавший метод оценки статистической значимости средних арифметических. Именно эта разработка легла в основу дисперсионного анализа, а распределение Стьюдента применялось Фишером в регрессионном анализе.

Важную роль в становлении и развитии биостатистики играли также такие известные учёные, как, Джордж Уоддел Снедекор (George Waddel Snedecor, 1881-1974), Дуглас Скотт Фальконер (Douglas Scott Falconer).

Значительный вклад в развитие биологической статистики внесли русские учёные: Плохинский Н.А., Глотов Н.В., Животовский Л.А., Меркурьева

Е.К., Лакин Г.Ф., Рокицкий П.Ф., Терентьев П.В., Васильева Л.А. и многие другие.

Пособие предназначено для того, чтобы обучающиеся разных направлений подготовки могли в соответствии с государственными образовательными стандартами использовать различные математические и статистические методы для обработки экспериментального материала, применять компьютерные технологии для решения поставленных задач с возможностью моделирования биологических и технологических процессов.

Необходимый уровень качества подготовки специалиста является системообразующим фактором в динамической системе учебного процесса и предполагает логическую последовательность изучения дисциплин. Рассматриваемые дисциплины базируется на дисциплине «Математика» и является логическим продолжением раздела «Теория вероятностей и математическая статистика». В связи с этим изучение дисциплины возможно после усвоения студентами математики и должно предшествовать изучению дисциплин общепрофессионального цикла.

В соответствии с назначением основной целью данного пособия является получение знаний, умений и навыков применения основных статистических методов, используемых в области сельского хозяйства, биологии, производства, переработки и оценки качества продукции и общественного питания.

Исходя из цели, в процессе изучения дисциплин решаются следующие задачи:

- теоретические основы статистики;
- составление репрезентативных выборок;
- выбор адекватного статистического метода, соответствующего поставленной задаче;
- методы оценки уровня выраженности признака и его изменчивости;
- формулирование, правила принятия и отклонения гипотез,
- методы оценки степени сопряжённости признаков.

По окончании изучения дисциплин в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта к уровню подготовки выпускников обучающийся должен:

иметь представление о существующих статистических методах, применяемых в профессиональной деятельности с использованием ЭВМ;

знать предмет, цель, задачи и методы изучаемого курса, подходы к вычислению показателей описательной статистики при разном объёме выборки, методы группировки данных, методы сравнения выборочных совокупностей, особенности применения методов параметрической и непараметрической статистики, способы вычисления показателей связи;

уметь выбирать адекватный статистический метод, объяснять полученные показатели и сравнивать их со стандартами, использовать средства вычислительной техники и прикладное программное обеспечение при решении статистических задач.

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриата и магистратуры очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки: Биология, Зоотехния, Ветеринарно-санитарная экспертиза, Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции, Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания.

РАЗДЕЛ 1. Основные термины и понятия

Для оценки и характеристики разных признаков и свойств объектов используются статистические методы анализа. Это позволяет упорядочить и систематизировать большой массив экспериментальных данных.

Последующий этап заключается в постановке цели и задач исследований, что сопровождается выбором методов решения этих задач. Завершающий этап включает анализ и корректное толкование полученных результатов, а итогом является формулировка выводов, предложений и составление прогнозов.

Статистическая обработка данных представляет собой инструмент принятия решений, основанном на тестировании статистических гипотез. Такая работа важна для исследования явных и скрытых закономерностей изучаемых процессов и явлений биологической природы. Необходимо понимать, что некоторые статистические методы могут быть ограничено использованы для обработки и анализа тех или иных экспериментальных данных. Поэтому при планировании проведения эксперимента и сборе данных важен правильный выбор математических методов первичной обработки результатов исследования.

В зависимости от цели и задач исследований определяется количество изучаемых параметров и факторов для характеристики объекта исследования.

Статистические методы анализа биологических объектов позволяют:

- определить средние величины признака;
- выявить изменчивость признака;
- установить характер и тип распределения объектов совокупностей;
- оценить достоверность различий по уровню проявления признака в разных совокупностях;
- определить силу и направление связи между признаками совокупности;
- изучить степень влияния того или иного фактора на изменчивость анализируемого признака.

Предметом статистической обработки экспериментальных данных служит группа объектов, которая представляет собой **совокупность**. Совокупностями могут являться сорта растений, породы животных, партии того или иного вида продукции. Совокупность состоит из единиц или членов. Число единиц, входящих в совокупность, называется **объёмом** совокупности и обозначается латинской буквой n. Единица совокупности характеризуется определёнными признаками. Сумма отдельных измерений или наблюдений также является совокупностью.

Величину изучаемого признака для какой-то единицы совокупности называют вариантой и обозначают x_1, x_2, x_3, …, а в общем виде x_i, где i порядковый номер варианты. Так, например, при изучении урожая пшеницы определённого сорта с 1 га получены следующие данные 25, 27, 28,5 ц. Эти величины и будут вариантами, т.е. x_1=25, x_2=27, x_3=28,5 ц/га.

Все признаки делятся на два больших класса: количественные и качественные.

Количественные признаки – это признаки, которые можно непосредственно измерить или сосчитать. Они могут принимать различные уровни и имеют, как правило, непрерывное варьирование от минимального до максимального значения (удой, живая масса животного, настриг шерсти, объём произведённой продукции и др.).

Вместе с тем, некоторые количественные признаки обладают дискретным характером изменчивости, когда исходные (первичные) данные представлены целыми значениями (яйценоскость, плодовитость, количество банок консервов и др.).

Качественные признаки – это признаки, которые описываются словами и отражают качественные характеристики объекта. Например: масть животного, окраска семян гороха. В случае, если у признака наблюдается только 2 градации, то такие признаки называются **альтернативные**. Большинство качественных признаков характеризуется альтернативной изменчивостью.

Например, пол животного может быть либо мужским, либо женским; масть животного – белая или чёрная, запах продукта – характерный или не свойственный и т.д. Выражаются эти признаки в долях единицы или процентах.

При статистической обработке экспериментальных данных качественные признаки могут быть представлены количественными показателями. Например, чёрную масть животных можно выразить числом «1», а белую – числом «2». Таким образом, деление признаков на количественные и качественные является условным. Такой приём очень часто используется при анализе данных на компьютере во всех известных статистических приложениях.

Генеральная и выборочная совокупность. Под **генеральной совокупностью** понимается весь массив объектов одной категории (например, сорт растений, вид животных или всё теоретически возможное потомство, которое может быть получено от одного животного). Объём генеральной совокупности определяется задачами исследования.

Охарактеризовать всю генеральную совокупность, например, по числу колосков пшеницы, живой массе коров и т.д. практически невозможно. Поэтому изучают не всю генеральную совокупность, а только её часть, которая называется **выборкой** или **выборочной совокупностью**. Из выборки можно выбрать ещё меньшую выборку. Каждый член выборки из определённой совокупности должен быть отобран случайно. Только в этом случае выборка даёт адекватное представление о генеральной совокупности, т.е. она является **репрезентативной** (представительной).

Если в выборочную совокупность входит до 30 объектов, то она называется малой ($n \leq 30$), а свыше 30 – большой ($n > 30$).

Для проведения статистической обработки экспериментальных данных требуется их группировка виде ранжированных, вариационных рядов, графиков и таблиц. Если объём выборки меньше или равно 30, то применяется **ранжирование -** распределение вариант в определённом порядке (убывания или возрастания). В том случае, если количество вариант в выборочной совокупности больше 30, то необходимо построить **вариационный ряд** - двойной ряд классов и частот.

Упорядочение экспериментальных данных позволяет проанализировать и сделать предположение о характере распределения объектов в выборке.

Принципы построения вариационного ряда. Первым шагом является установление размаха изменчивости признака в анализируемой выборочной совокупности. Для этого необходимо выявить максимальное (max) и минимальное (min) значение признака. Далее определяется разность между этими величинами (R) и вычисляется классный промежуток (k) - величина, на которую различаются значения классов между собой.

$$k = R/m, \quad (1)$$

где R - размах вариации; m - количество классов.

Выбор числа интервалов (классов) согласно эмпирически выработанным рекомендациям (табл. 1), приблизительно рассчитывается по формуле $m \approx \sqrt{n}$ или более точно с помощью методов Стёрджеса (Sturges), Скотта (Scott) и Фридмана-Дайкониса (Freedman-Daiconis) согласно формулам 2-4 соответственно:

$$k_{St} = 1 + \left[\log_2 n\right] = 1 + \left[3{,}322\, lg\, n\right] \ (2)$$

$$k_{Sc} = 3{,}49 \cdot \sigma \cdot n^{-\frac{1}{3}} \ (3)$$

$$k_{FD} = 2\frac{IQR}{\sqrt[3]{n}} \ (4)$$

Таблица 1. Зависимость количества классов от объёма совокупности

Объем выборки, n	Количество классов, m
25 - 40	5 – 6
40 – 60	6 – 8
60 – 100	7 – 10
100 - 200	8 – 12
> 200	10 – 15

При построении вариационного ряда можно учитывать варианты не только через абсолютные значения их количества, но и через относительные. Они вычисляются как отношения соответствующих частот к объёму всей совокупности и называются **частости.** Частости могут быть выражены в относительных долях единицы или процентах.

Вариационный ряд можно представить графически с помощью полигона или гистограммы распределения. Вопрос о количестве классов решается исследователем в каждом конкретном случае в зависимости от поставленной задачи и особенностей исходных данных. Завершающий этап построения вариационного ряда заключается в установлении границ классов и распределения вариант совокупности по соответствующим классам.

Кумулята — графическое изображение вариационного ряда, когда на вертикальной оси откладываются накопленные частоты или частости, а на горизонтальной — значения признака. Кумулята служит графическим способом представления признаков как с дискретной, так и непрерывным характером изменчивости.

Полигон распределения применяется для визуализации распределения дискретных признаков с прерывистым характером изменчивости и представляет собой ломаную линию.

Гистограмма распределения имеет вид столбчатой диаграммы, позволяющей судить о распределении частот совокупности. Гистограмму используют для характеристики количественных признаков с непрерывным характером изменчивости.

Полигон и гистограмма позволяют оценить качество входных данных и обосновать выбор параметрических или непараметрических статистических критериев. Наряду с описанными выше типами диаграмм, широкой распространение получила также диаграмма квантиль-квантиль (Q-Q plot), которая предполагает более гибкий подход к оценке варьирующих признаков без деления на классы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является предметом статистической обработки экспериментальных данных?

2. В чем заключается различие между генеральной и выборочной совокупностью?

3. Что такое репрезентативность выборочной совокупности?

4. Каковы основные принципы построения вариационного ряда?

5. Перечислите типы графического представления вариационного ряда.

6. Что позволяют оценить графики распределения объектов совокупности?

1.1 Виды распределений признаков

К основным разновидностям распределений можно отнести нормальное, биномиальное и распределение Пуассона.

Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса или Гаусса - Лапласа играет огромную роль в статистическом анализе данных и позволяет исследователю определить, с какой частотой значения переменной попадают в определённые интервалы (классы). Такое распределение характерно для большинства признаков, которые учитываются в сельском хозяйстве и биологии. Полученные значения функции нормального распределения могут использоваться при решении широкого круга задач, к числу которых относится прогнозирование.

Рассматриваемое распределение (распределение ошибок Гаусса) с математическим ожиданием μ=0 и дисперсией σ^2=1 называется стандартизированным нормальным распределением или нормальным распределением в стандартной форме (В. Шталь, Д. Раш, Р. Шиллер, Я. Вахал, 1973).

Функция вероятности, соответствующая функции Гаусса имеет вид:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (5)$$

где $p(x)$–плотность вероятности;

μ – математическое ожидание;

x_i– величина варьирующего признака;

π = 3,14159;

e – основание натурального логарифма (e=2,71828);

σ – среднее квадратическое отклонение;

σ^2 – варианса.

Параметры нормального распределения относят к функции плотности. Соответствующая функция распределения нормальной случайной величины обозначается *(x)* и задаётся соотношением:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (6)$$

где *t*– величина нормированного отклонения;

dt–малая величина, определяющая ширину интервала.

Используя функцию нормального распределения можно определить теоретическую частоту любого эмпирического вариационного ряда. Кривая распределения имеет колоколообразную форму (рис. 1) и симметрична относительно перпендикуляру, опущенному из её вершины на ось абсцисс. Ветви кривой по мере удаления от нулевой координаты все ближе и ближе приближаются к оси абсцисс, но никогда не соприкасаются с ней. Если эмпирический вариационный ряд имеет нормальное распределение, то значение μ совпадает с непараметрическими средними значениями – модой (*Mo*) и медианой (*Me*).

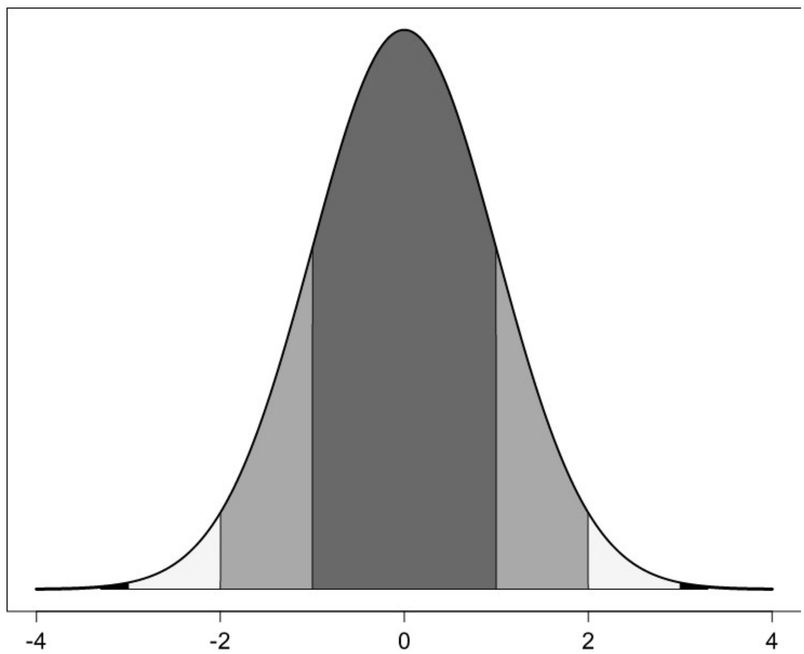


Рис. 1. Плотность вероятности нормального распределения

Нормально распределённый количественный признак подчиняется правилу трёх сигм. Правило трёх сигм гласит: «Если случайная величина x распределена нормально (с параметрами μ и σ), то практически достоверно, что абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения». Таким образом, при наблюдении нормально распределённой случайной величины, обнаруживается, что все значения параметра изучаемого признака находятся в пределах $\bar{x}\pm 3\sigma$. В правую сторону от μ ставят возрастающие значения среднего квадратического отклонения, а в левую сторону – убывающие. Теоретически минимальные и максимальные значения признака находятся в границах $\bar{x}\pm 3{,}3\sigma$, при этом охватывается 99,9% всех членов совокупности. Отсюда следует, что можно определить приближённое значение σ:

$$\sigma \approx \frac{x_{max} - x_{min}}{6{,}6} \quad (7)$$

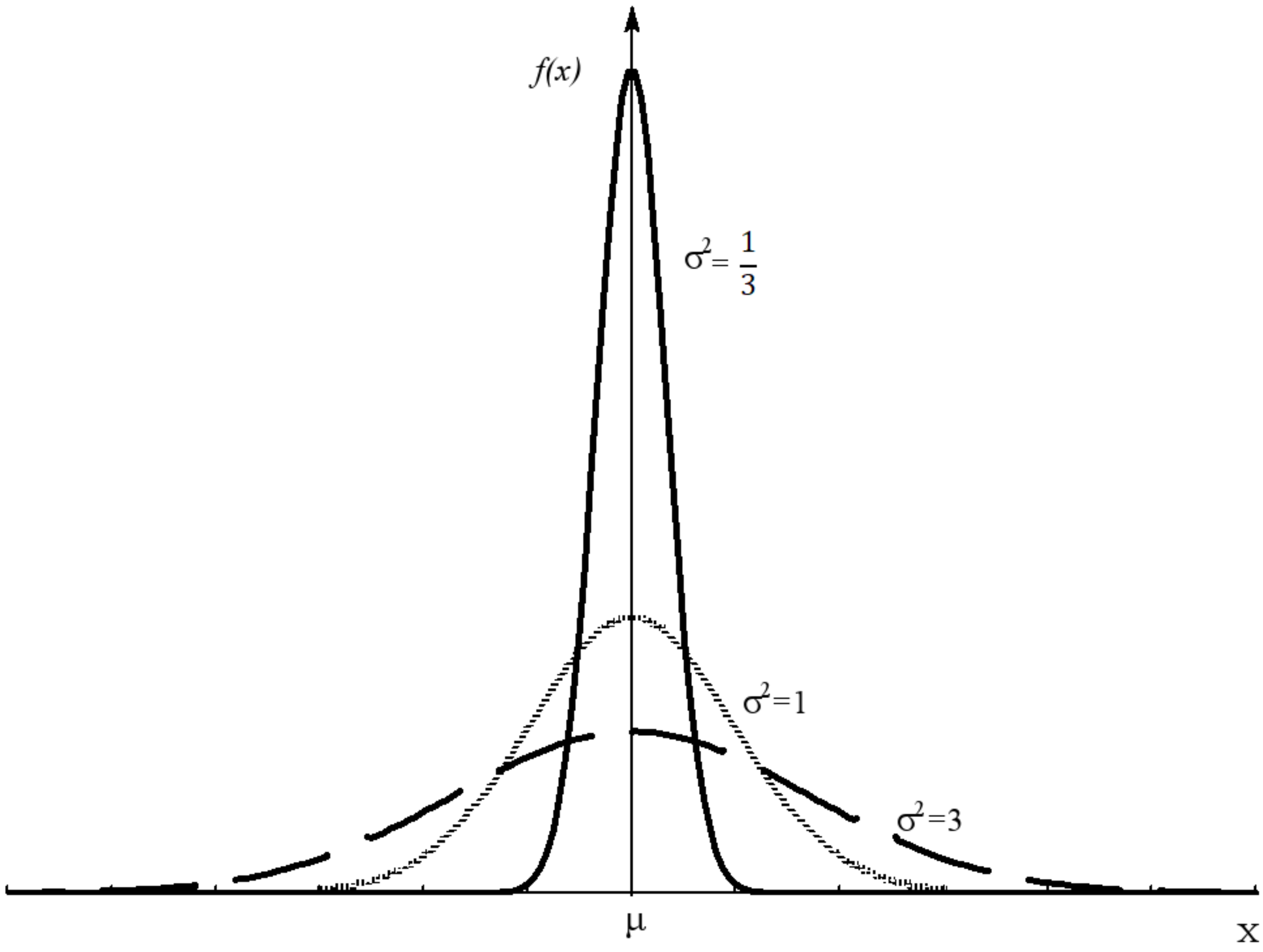


Рис. 2. Функция плотности нормального распределения при μ=0 и σ^2=⅓, σ^2=1, σ^2=3

Функция (1) имеет максимальное значение при $x_i = \mu$. В зависимости от величины стандартного отклонения вид кривой нормального распределения может изменяться (рис. 2). Изменение параметра μ приводит к передвижению кривой по оси x. Рис. 2 показывает, что чем больше σ, тем кривая принимает более плоскую форму. Таким образом, при **увеличении** изменчивости признака кривая распределения растягивается вдоль оси абсцисс.

Оценка вида кривой распределения Гаусса-Лапласа основана на вычислении коэффициентов асимметрии *(As)* и эксцесса *(Ex)*, которые оценивают симметричность и так называемую «крутость» кривой распределения. Симметричным называют распределение, в котором частоты двух равноудалённых от центра вариационного ряда вариант равны между собой. При анализе вида распределения симметрия встречается очень редко, чаще всего можно наблюдать асимметрию, вычисляемую по формуле (основанной на определении центрального момента 3-го порядка):

$$As=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^3=\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum t_x^3, \quad (8)$$

где

n - объём совокупности;*t - величина нормированного отклонения.*

Установление плоско- или островершинности кривой распределения ошибок Гаусса основано на нахождении коэффициента эксцесса (*Ex=0*), который также может быть рассчитан для других видов распределения. Наиболее точным является метод, когда *Ex* рассчитывается при определении центрального момента 4-го порядка:

$$Ex=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\left(\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^4\right)-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}=\left(\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum t^4\right)-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}, \quad (9)$$

Если значение *Ex>0*, то распределение является островершинным, если *Ex<0*- плосковершинным.

Практическое использование функции Гаусса-Лапласа нашло своё отражение при тестировании эмпирических данных на нормальность распределения. При этом пользуются построением вариационных рядов и их графических изображений в виде гистограмм (рис. 3). По оси абсцисс приводятся значения классов изучаемого признака в ранжированном ряду, а по оси ординат – частоты. Кривая распределения Гаусса в данном случае строится в соответствии с функцией плотности нормального распределения (формула 5).

Если в вариационном ряду указаны не относительные частоты, а частости (накопленные относительные частоты), то столбиковая диаграмма выглядит несколько иначе и соответствует функции нормального распределения (рис. 4, формула 6).

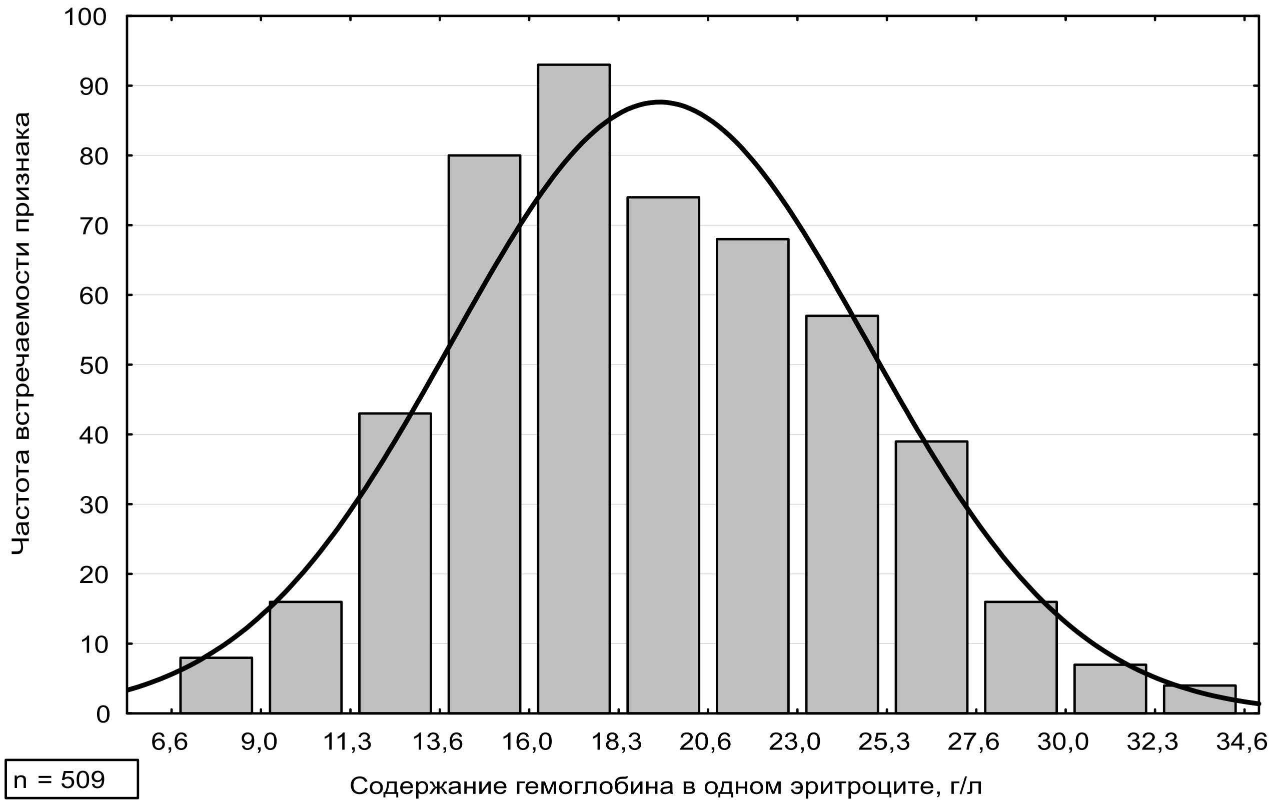


Рис. 3. Гистограмма распределения частот по содержанию гемоглобина в одном эритроците цельной крови поросят-сосунов крупной белой породы

Представленный вероятностный график позволяет визуально оценить степень соответствия эмпирических частот - теоретическим, вычисленным в соответствии с особенностями распределения Гаусса. Чем ближе значения частот приближаются к теоретической кривой, тем больше распределение фактических частот распределено нормально. Главной особенностью представленной модели графика является возможность выявления крайних значений (рис. 5), называемых выбросами (outliers).

Для получения более глубоких, в аналитическом плане, результатов оценки закономерностей распределений прибегают к вычислению квартилей, децилей и процентилей. Они позволяют разбивать ранжированный ряд на определённые промежутки, величина которых зависит от решаемой задачи, поставленной исследователем.

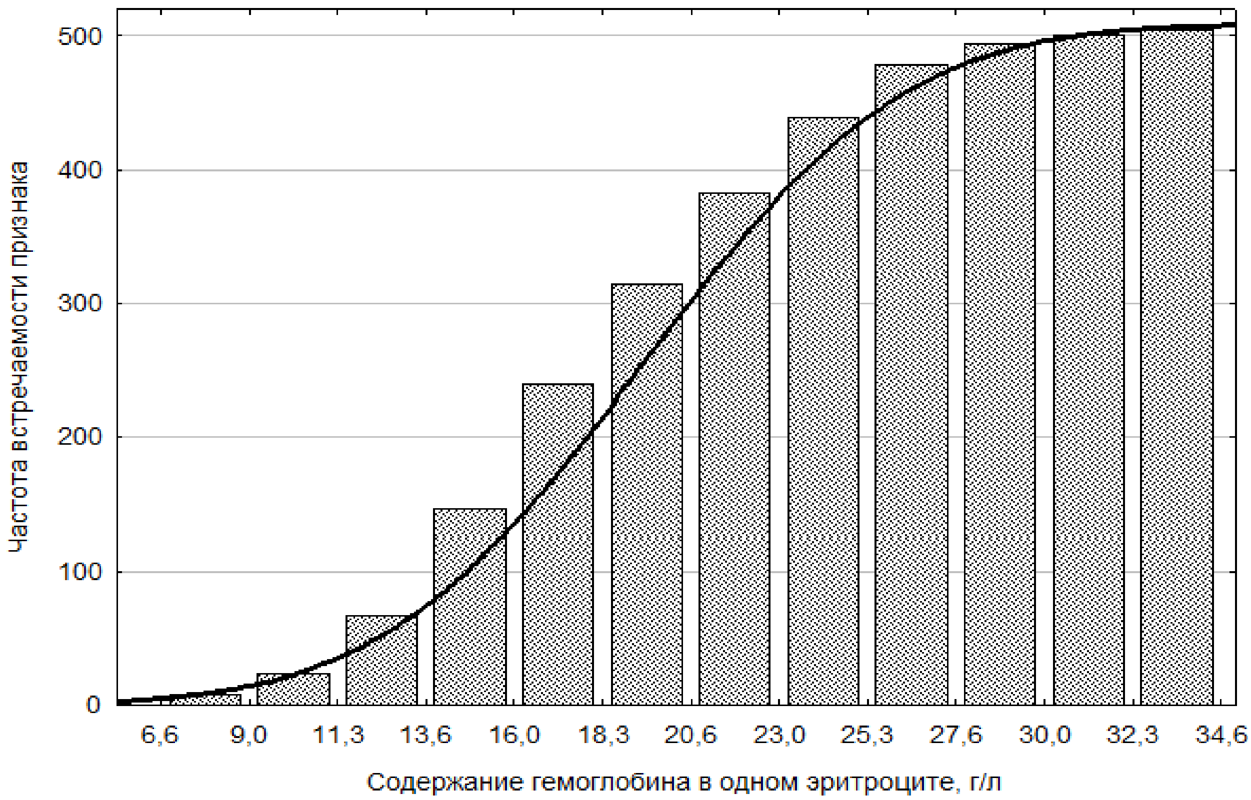


Рис. 4. Гистограмма распределения накопленных частот по содержанию гемоглобина в одном эритроците цельной крови поросят-сосунов крупной белой породы

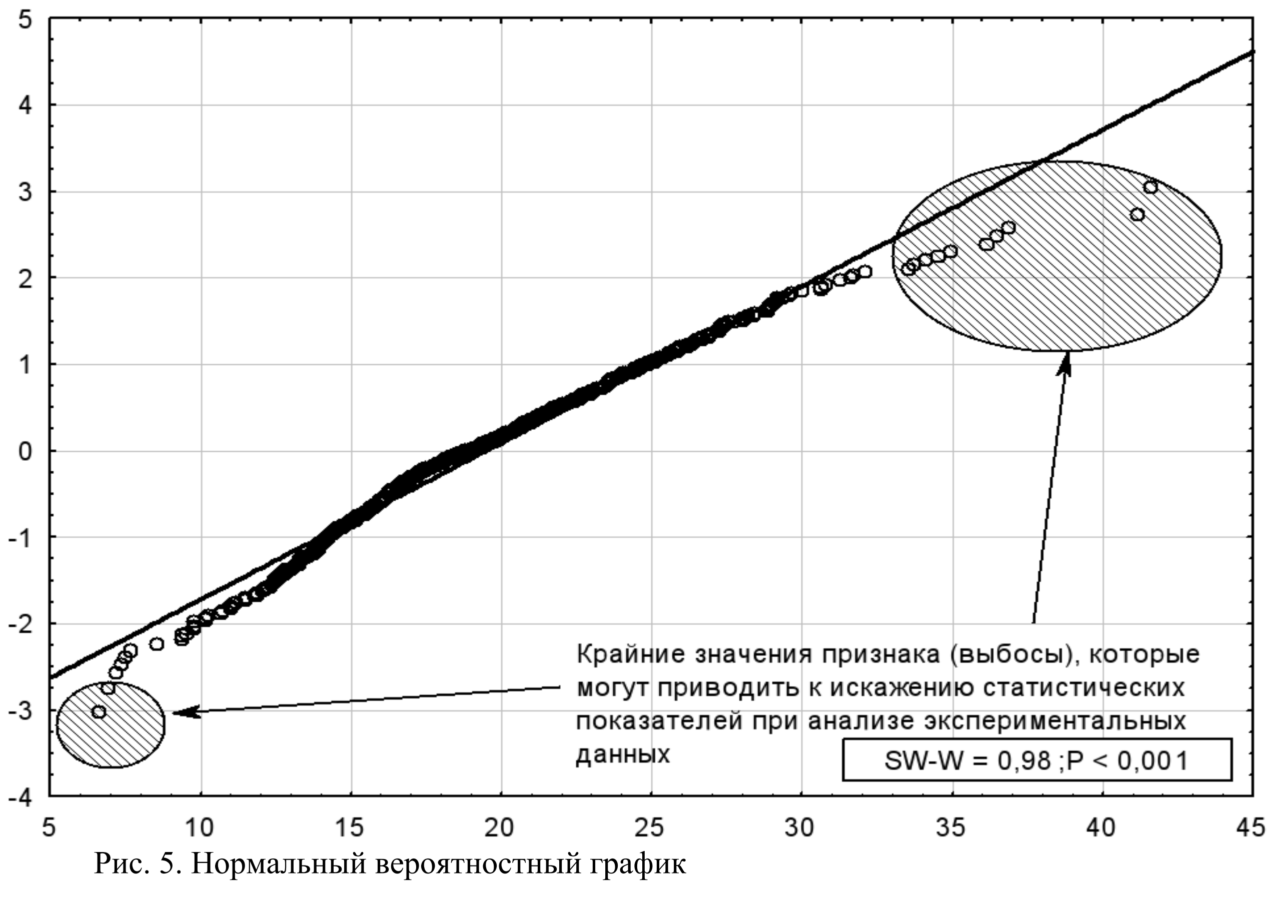


Рис. 5. Нормальный вероятностный график

Квартили представляют собой значение определённой варианты, позволяющей делить ранжированный ряд на 4 равновеликие совокупности. Выделяют нижний (Q_1), средний (Q_2) и высший (Q_3) квартили. Нижний квартиль составляет $\frac{1}{4}$ часть исследуемой совокупности и отделяет варианты с наименьшей величиной проявления признака, высший – $\frac{1}{4}$часть вариант, характеризующихся наибольшими значениями признака. Q_2 – делит ранжированный ряд на две равные части и по своему значению совпадает с медианой.

$$Q_1 = x_{Q_1} + k\frac{0{,}25\sum f_i - S_{Q-1}}{f_{Q_1}}, \quad (10)$$

где x_{Q_1}– нижняя граница класса определяемого нижнего квартиля (вычисляется по накопленной частоте, которая первой превысит 25% объёма совокупности);

k – величина классового промежутка;

f_{Q_1}– частота класса определяемого нижнего квартиля;

S_{Q_1-1}– накопленная частота класса, предшествующая классу, для которого определяется нижний квартиль.

Способом, подобному приведённому выше, прибегают к вычислению верхнего квартиля:

$$Q_3 = x_{Q_3} + k\frac{0{,}75\sum f_i - S_{Q_3-1}}{f_{Q_3}}, \quad (11)$$

где x_{Q_3}–нижняя граница класса определяемого верхнего квартиля (вычисляется по накопленной частоте, которая первой превысит 75% объёма совокупности);

f_{Q_3}– частота класса определяемого верхнего квартиля;

S_{Q_3-1}– накопленная частота класса, предшествующая классу, для которого определяется верхний квартиль.

Определение медианы сопряжено с нахождением Q_2, позволяющим делить выборку на две равнообъёмные части, и выражается формулой:

$$Me = Q_2 = x_{Q_2} + k\frac{0{,}50\sum f_i - S_{Q_2-1}}{f_{Q_2}}, \qquad (12)$$

где x_{Q_2} – нижняя граница класса определяемого Q_2 (вычисляется по накопленной частоте, которая первой превысит 50% объёма совокупности);

f_{Q_2} – частота класса определяемого Q_2;

S_{Q_2-1} – накопленная частота класса, предшествующая классу, для которого определяется Q_2.

Наряду с использованием квартилей с целью более глубокого анализа характера эмпирических распределений применяют перцентили (персентили, процентили) и децили. Процентили позволяют исследователю делить выборку на 100 равных частей. Определение рассматриваемых показателей схоже с тем методом, который применялся для определения квартилей:

$$p_1 = x_{p_1} + k\frac{0{,}01\sum f_i - S_{p_1-1}}{f_{p_1}}, \qquad (13)$$

где x_{p_1} – нижняя граница класса вычисляемого для p_1;

f_{p_1} – частота в классе, вычисляемом для p_1;

S_{p_i-1} – накопленная частота, вычисляемая для класса, где определяется p_1.

Перед началом статистической обработки экспериментальных данных и использованием любого статистического метода необходимо проводить проверку нормальности распределения изучаемого признака. Это возможно при применении специальных статистических тестов или визуальной оценки. Примером таких тестов являются критерий χ^2 (Хи-квадрат) и тест Колмогорова-Смирнова.

Биномиальное распределение. Наряду с количественными признаками, характеризующимися непрерывной изменчивостью, часто анализируются качественные признаки с альтернативной изменчивостью. Необходимость математической обработки таких признаков способствовала своевременному появлению соответствующего статистического инструментария, основанного, чаще всего, на понимании биномиального типа распределения.

Во многих задачах, которые предстоит решать исследователю, рассматриваются независимые многократно повторяемые испытания, называемые *испытаниями Бернулли*[1]. Каждое испытание приводит к появлению одного их возможных исходов, которые могут быть как успешными (признак проявился), так и неудачными (признак отсутствует). Возможность появления члена совокупности с наличием какого-либо признака обозначается буквой p, а его отсутствие – буквой q.

Самым простым примером *испытаний Бернулли* может служить многократное подбрасывание монеты. Вполне очевидно, что в этом случае вероятность выпадения решки равна вероятности выпадения орла:

$$p=q=\frac{1}{2}\ (14)$$

При подбрасывании двух монет вероятность выпадения двух орлов равна $pp=p^2$, а двух решек – $qq=q^2$. При этом вероятность выпадения орла и решки равна $pq+pq=2pq$. Число наблюдений в таких опытах обозначается буквой k. Из сказанного следует, что при различном количестве событий (n) распределение может описываться выражением $(p+q)^n$, которое называется биномом Ньютона[2]. Таким образом, используя формулы сокращённого умножения, получаем (табл. 2).

Таблица 2. Биномы Ньютона и число последовательных испытаний

[1] Названы в честь Якоба Бернулли (1654 – 1705), выдающегося математика, основоположника теории вероятностей. Бернулли доказал и сформулировал теорему, носящую его имя (*Теорема Бернулли*).

[2] Необходимо уточнить, что термин «бином Ньютона» не совсем корректен, так как выражение $(p+q)^n$ не является биномом («бином» - это двучлен).

Выражение	Число наблюдений в группе (k)
$(p+q)^0 = 1$	k=0
$(p+q)^1 = p+q$	k=1
$(p+q)^2 = p^2+2pq+q^2$	k=2
$(p+q)^3 = p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$	k=3
$(p+q)^4 = p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+4q^4$	k=4 и т.д.

Для быстрого получения теоретических частот биноминального ряда можно воспользоваться треугольником Паскаля (рис.6).

k=0								1							
k=1							1		1						
k=2						1		2		1					
k=3					1		3		3		1				
k=4				1		4		6		4		1			
k=5			1		5		10		10		5		1		
k=6		1		6		15		20		15		6		1	
k=7	1		7		21		35		35		21		7		1

Рис. 6. Треугольник Паскаля

Примечательным следует считать тот факт, что представленный выше треугольник впервые был предложен китайским исследователем Янгом Хуэем (Yang Hui, 1238-1298) и в Китае носит название своего создателя (рис. 7).

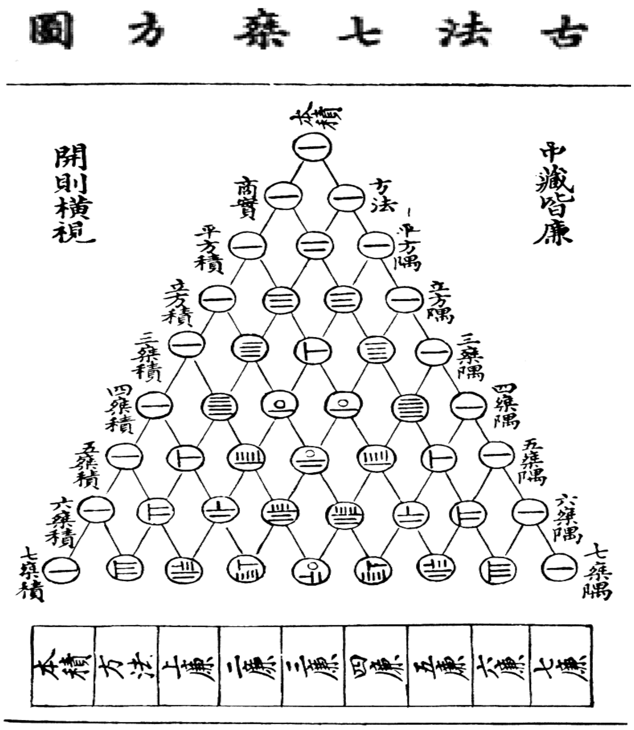


Рис 7. Треугольник Янга Хуэя

Симметричность кривой биномиального распределения наблюдается при p=0,5. В дополнение к сказанному необходимо отметить, что при увеличении объёма выборки распределение также становится более симметричным *(*при $p \neq 0,5$*)*. При большом числе n биномиальное распределение будет все больше соответствовать нормальному распределению при одинаковом математическом ожидании ($\mu = np$, при $np \geq 5$) и вариансе ($\sigma^2 = np(1 - p)$, при $np\ (1 - p) \geq 5$).

Распределение Пуассона[3] **(распределение редких событий)** представляет собой распределение случайной величины, обладающей прерывистым характером изменчивости. Оно выступает в качестве предельного случая распределения Бернулли. Это наблюдается при увеличении объёма совокупности и фиксированном значении $np = \lambda > 0$.

Особенностью рассматриваемого распределения заключается в его способности описывать распределение редких событий при очень большом числе наблюдений. При этом типе распределения величина p очень мала, а изменчивость признака имеет прерывистый характер.

Функция плотности распределения Пуассона определяется формулой:

$$f(k;\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (15)$$

где e – основание натурального логарифма (e = 2,71828);

k – число ожидаемых событий, вероятность которых вычисляется по функции;

$k!$ – факториал k;

λ – количество событий, происходящих в единицу времени.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое распределение и как можно его изобразить?
2. Что называют распределением ошибок Гаусса?
3. В чём состоит смысл правила «$\pm 3\sigma$»?

[3] Пуассон Симеон Дени (1781-1840) – французский физик, математик. Доказал частный случай закона больших чисел и одну из предельных теорем в теории вероятностей (теорема Пуассона).

4. Какое правило выполняется в отношении μ, *Mo* и *Me* в случае, когда фактическое распределение признака соответствует теоретическому распределению Гаусса-Лапласа?
5. Для какого вида признаков прибегают к построению гистограмм распределений с целью её визуальной оценки?
6. С помощью каких методов можно оценить соответствие эмпирического распределения нормальному?
7. Какие виды признаков существуют в окружающем нас мире и в чём состоят их отличия друг от друга?
8. Какие типы распределений вы знаете, и с какой целью их изучают?
9. Что такое асимметрия и эксцесс? Какие статистические показатели оценивают их величину?
10. Что означают фразы: «Дискретный (прерывистый) характер распределения признака» и «Непрерывный характер распределения признака»?

1.2 Статистические параметры, характеризующие выборочную совокупность

Средние величины. При определении вида вычисляемого среднего значения важно учитывать некоторые особенности, присущие первичным данным и осмысленности определяемого показателя. Так, исследователь может сталкиваться с весьма высокой изменчивостью признака, последовательностью цепных относительных величин динамики (например, скорость роста животного в различные периоды онтогенеза), а также взвешенными значениями исходных вариант.

Средние величины можно представить в виде двух классов: степенные и структурные средние. К степенным относят такие часто применяемые показатели, как: средняя арифметическая, средняя геометрическая, средняя гармоническая, средняя квадратическая и средняя кубическая. В качестве структурных средних (непараметрических средних) принято рассматривать моду и медиану.

Мода (Мо) - наиболее часто встречающаяся варианта в совокупности.

Медиана (Ме)-варианта, расположенная в середине (центре) ранжированного или вариационного ряда и делящая его на две равные части.

Однако мода и медиана являются приближенными характеристиками среднего значения признака. Более точными характеристиками выборочных совокупностей является оценка среднего значения признака.

Средние величины

Средняя арифметическая ($\bar{x}$) показывает, какое значение признака наиболее характерно в целом для данной совокупности. Она используется для сравнения пород, стад, линий, семейств и т.д. по какому-либо признаку. Определяют по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \qquad (16)$$

где $\sum$- знак суммирования;

x_i– варианта;

n – объем совокупности.

Для одномодального симметричного распределения средняя арифметическая, медиана и мода совпадают.

Средняя геометрическая ($\bar{x}_{геом}$) используется для изучения среднего прироста живой массы, увеличения численности стада и т. д. Вычисляют по формуле:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}, \quad (17)$$

где $x_1 \ldots x_n$ - варианты, т. е. значения варьирующего признака;

n -число членов в выборке.

Средняя квадратическая ($\bar{x}_{кв}$) используется для определения средних площадей, диаметров, радиусов (диаметр эритроцитов, объем клеточного ядра и т. д.). Рассчитывают по формуле:

$$\bar{x}_{кв} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \quad (18)$$

Средняя гармоническая ($\bar{x}_{гарм}$) используется при усреднении меняющихся скоростей (скорость молоковыведения, скорость бега лошадей) и определяются по формуле:

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \quad (19)$$

Средняя взвешенная ($\bar{x}_{взв}$) применяется в тех случаях, когда та или иная варианта встречается несколько раз:

$$\bar{x}_{взв} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}, \quad (20)$$

где f_i – частота встречаемости отдельно взятой варианты.

В каждом конкретном случае при выборе вида средней величины обычно исходят из характера первичных данных и их взаимосвязи с итоговым показателем.

Свойства средней арифметической:

1. Средняя арифметическая постоянной равна самой постоянной.

2. Если к каждой варианте ряда прибавить или отнять одну и ту же величину, то средняя арифметическая увеличится или уменьшится на эту же величину, т.е.

$(x_1+ a), (x_2 + a), (x_3 + a)...(x_i+ a)$, то средняя будет равна $\bar{x} + a$,

$(x_1 - a), (x_2 - a), (x_3 - a)...(x_i - a)$, то средняя будет равна $\bar{x} - a$.

3. Если уменьшить (увеличить) все варианты в одинаковое число раз k, то средняя уменьшится (увеличится) во столько же раз.

то средняя арифметическая будет равна

4. Если уменьшить или увеличить частоты всех вариантов (f_i) в какое-либо постоянное число раз, то средняя арифметическая не изменится.

5. Алгебраическая сумма отклонений отдельных вариант совокупности от средней арифметической этой совокупности равна нулю, т.е. $(x_1-\bar{x})+(x_2 -\bar{x})+(x_3-\bar{x})+... + (x_i-\bar{x}) = 0$.

6. Сумма квадратов отклонений вариант совокупности от средней арифметической меньше суммы квадратов отклонений от любой другой величины *(A)*, т.е. $\sum(x_i-\bar{x})^2<\sum(x_i-A)^2$.

Средняя арифметическая величина является обобщённой характеристикой совокупности. Часто значение средней арифметической величины реально не существует, например, плодовитость свиноматок =10,4 особи и др. В этом смысле средняя арифметическая является абстрактной величиной, но в, тоже время она и конкретная величина, характеризующая типичное состояние признака в совокупности.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите метод(ы) определения средних арифметических для малых выборок.
2. Каким образом вычислить средние арифметические в случае обработки больших массивов данных?
3. Какие виды средних относятся к степенным средним?
4. Какие статистические показатели относятся к структурным средним?

Изменчивость признака. Все живые организмы имеют одно важное свойство: изменчивость. Именно изучению изменчивости посвящено большое количество трудов в области мировой статистики. Под изменчивостью понимается изменение степени выраженности признака того или иного объекта живой природы под влиянием условий окружающей среды. Это определение в первую очередь относится к количественным признакам. Тем не менее, возможно наблюдать явление изменчивости по качественным признакам, по которым можно наблюдать возникновение множества градаций его проявления. Однако, необходимо также принимать во внимание, что при статистической обработке таких дискретных категорий, исследователь ведёт работу с их частотами. В этом случае, изменчивость можно понимать как изменение частот категориальных или ранговых признаков.

Вопросами изучения изменчивости люди были заинтересованы с глубокой древности, но научные предпосылки развития методов её оценки начали разрабатываться, с точки зрения истории человечества, относительно недавно.

Методы определения средних арифметических и статистических показателей, характеризующих изменчивость признака, сопряжены с объёмом выборочной совокупности. Существует два разных подхода к обработке таких выборок: прямой метод расчётов, применяемый для малых выборок и методы сумм и условных отклонений, используемых в случае наличия больших выборочных совокупностей ($n \leq 30$). Такое разделение подходов к вычислениям можно объяснить высокими временными затратами при обработке больших массивов исходных данных и было актуально до недавнего времени. Тем не менее, с развитием информационных технологий такие затруднения отсутствуют, и применяется прямой подход. Вместе с тем, деление выборок на несколько равных частей предполагает создание гистограмм распределения, помогает оценить природу доступных данных и являются неотъемлемой частью вычисления некоторых статистических критериев. Данное утверждение уместно и для качественных признаков, математическая обработка которых также связано с понятием групп и частот. Тем самым, рассмотрение разных подходов к определению статистических показателей, оценивающих изменчивость признака, представляет практический интерес и способствует улучшению понимания характера его распределения.

Изменчивость признаков может быть оценена с помощью суммы квадратов (в биологической статистике этот статистический показатель именуется дисперсией), вариансы (в математической статистике называемой дисперсией), среднего квадратического отклонения и коэффициента вариации. Для характеристики средней арифметической определяют стандартную ошибку. Среди перечисленных показателей к относительным можно отнести только коэффициент вариации, который применяется для оценки степени изменчивости и может использоваться в сравнительных исследованиях. Формулы нахождения ошибки средней арифметической, стандартного отклонения, вариансы и коэффициента вариации являются общими для прямого метода, методов сумм и условных отклонений.

Для характеристики разнообразия признаков в совокупности применяют *размах колебаний или лимиты, среднее линейное отклонение, суммы квадратов, вариансу, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации*.

Размах колебаний или лимиты (L) - это разность между максимальным и минимальным значениями признака в совокупности. Чем больше разность между максимальной (*max*) и минимальной (*min*) вариантой, тем выше изменчивость признака. Однако при одинаковых лимитах изменчивость в сравниваемых группах может различаться, так как лимиты не учитывают распределения отдельных вариант в совокупности.

Установлено, что алгебраическая сумма отклонений отдельных вариант совокупности от средней арифметической этой совокупности равна нулю, т.е. $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+(x_3-\bar{x})+... + (x_i-\bar{x}) = 0$. Поэтому можно взять отклонение отдельных вариант от средней арифметической по модулю, без учёта знака или возвести в квадрат это выражение. В зависимости от действий получаем *среднее линейное отклонение* либо *дисперсию.*

Среднее линейное отклонение (Θ — тэта) вычисляют по формулам:

для не сгруппированных данных $\Theta = \dfrac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n-1}$, (21);

для сгруппированных данных $\Theta = \dfrac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum f_i}$, (22).

Более точным показателем, характеризующим вариацию или рассеяние вариант вокруг среднего арифметического значения, является сумма квадратов отклонений вариант совокупности от среднего значения, т.е.

$$S = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots (x_n - \bar{x})^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 (23)$$

Сумма квадратов отклонений вариант совокупности от средней обозначается символом *S.*

$$S = \sum (x_i - \bar{x})^2, (24).$$

Преобразуем выражение и получим формулу:

$$S = \sum f \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum f \cdot x_i\right)^2}{n}, (25).$$

Для данных, сгруппированных в ряд, получим формулу:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{df}, (26).$$

Варианса (дисперсия) *(σ^2)* также является показателем изменчивости признака. Варианса - это сумма квадратов отклонений отдельных вариант от средней арифметической, делённой на число степеней свободы:

$$\sigma^2 = \frac{S}{n-1}, \quad (27)$$

где *df* - число степеней свободы, т. е. количество всех вариант совокупности, уменьшенных на единицу (*df* =*n* - 1). Знаменатель дроби *n - 1* получил название ***"число степеней свободы вариации".***

Корень квадратичный из $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ - получил название ***среднего квадратического отклонения.*** Среднее квадратическое отклонение обозначается буквой σ (сигма). Это величина именованная, то есть выражается в тех же единицах, что и $\bar{x}$(кг, см, % и т.д.). Чем больше величина σ, тем выше изменчивость. Среднее квадратическое отклонение является основным показателем, характеризующим изменчивость анализируемой выборочной совокупности. Вся изменчивость признака лежит от средней арифметической в пределах ±3,3σ($\bar{x} \pm 3{,}3\sigma$). Это называется *правилом «плюс-минус трёх сигм».* Поэтому средняя арифметическая, увеличенная и уменьшенная на три сигмы, даёт практически крайние значения признака.

Таким образом, **среднее квадратическое отклонение** – это параметр, который характеризует меру разнообразия в выборочной совокупности и определяет с определённой вероятностью границы этого распределения.

Коэффициент вариации (Cv) – относительный показатель, характеризует, какой процент от $\bar{x}$ составляет σ. Коэффициент вариации рассчитывают по формуле:

$$Cv = \frac{\sigma \cdot 100\,\%}{\bar{x}}, \quad (28)$$

С помощью коэффициента вариации можно сравнить изменчивость разных признаков.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под термином «изменчивость»?
2. Какой статистический показатель используют для характеристики средней арифметической?
3. Какие статистические показатели характеризуют изменчивость признаков?
4. С помощью какого показателя можно оценить уровень изменчивости признака в относительных величинах?

Типы ошибок

1. Являющиеся следствием неверных измерений, описок, неправильных вычислений. *Устранение* – тщательная и внимательная работа, перепроверка.
2. Возникающие в результате недостаточной разрешающей способности измерительного прибора. *Устранение* – повторение измерения несколько раз и за окончательное значение взять среднюю.
3. Обусловленные статистическим методом, т.е. методом выборки - это статистические ошибки. *Устранение.* Поскольку чем больше объем выборки приближается к объёму генеральной совокупности, тем точнее выборка отражает свойства генеральной совокупности, тем меньше будут статистические ошибки $\bar{x}, \sigma, Cv$. И при включении в статистическую обработку всей генеральной совокупности, никаких статистических ошибок не возникает.

Оценка параметров генеральной совокупности по параметрам выборочной совокупности. Значение средней арифметической и других параметров выборочной совокупности в большинстве случаев не совпадает со значениями соответствующих характеристик генеральной совокупности. Но можно определить интервал, в котором находятся параметры генеральной совокупности, вычислив статистическую ошибку соответствующего параметра.

Стандартная ошибка. Считается, что средняя арифметическая выборочной совокупности соответствует генеральной средней μ(или мат. ожиданию), но с определённой «погрешностью», которая описывается ***стандартной ошибкой*** (СО) и обозначается $s_{\bar{x}}$.

Если известен объем генеральной совокупности (N), то СО вычисляется по формуле $s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}$ (29)

Если $N \to \infty$, то $\sqrt{1-\frac{n}{N}}$ бесконечно малое число, тогда $s_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, (30)

Смысл стандартной ошибки заключается в том, что она позволяет судить о качестве выборочной средней**.** Математически это можно выразить как $\bar{x}-s_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x}+s_{\bar{x}}$

Стандартную ошибку для σ находят по формуле $s_{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$, (31)

Стандартную ошибку для *Cv* находят по формуле $s_{\mathrm{Cv}}=\frac{\mathrm{Cv}}{\sqrt{2n}}$, (32)

Стандартную ошибку для *As* находят по формуле:

$$s_{\mathrm{As}}=\sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}}, \qquad (33)$$

Стандартную ошибку для *Ex* находят по формуле:

$$s_{\mathrm{Ex}}=\sqrt{\frac{24\,n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}}, \qquad (34)$$

Сравнение двух выборочных совокупностей. Статистическая обработка экспериментальных данных начинается с применения методов группировки и вычисления показателей описательной статистики. Тем не менее, не всегда на практике достаточно ограничиться описательным характером обработки информации. Очень часто возникает необходимость сравнивать выборочные совокупности в зависимости от действий исследователя или влияния других факторов.

Необходимость разработки методов сравнения выборочных совокупностей между собой предполагает использование средних значений, характеризующих степень выраженности того или иного признака. Вычисление разности помогает нам судить об уровне существующих отличий. Вместе с этим, нам ничего не известно о вероятности таких различий, представление о которой даёт понимание уровня случайно варьирующих представителей совокупности.

В журнале «Biometrika», курируемом Карлом Пирсоном, были опубликованы работы Уильяма Сили Госсета, среди которых особую известность получила «Вероятная ошибка среднего» (*The Probable Error of a Mean*). В своих статьях Уильям уделял внимание решению поставленных выше задач и разработал метод сравнения средних арифметических двух сравниваемых совокупностей между собой.

Уильям работал на пивоварне Arthur Guinness Son & Co в Дублине и занимался оценкой качества пива и подбором лучших сортов ячменя для его приготовления. Этому способствовал опыт его пребывания в биометрической лаборатории Пирсона, который хорошо к нему относился и помогал математической части исследований Госсета. В связи с запретом на публикацию любых статей его сотрудниками, Госсет печатал результаты своих исследований под псевдонимом Стьюдент (Student). Таким образом, разработанный им метод сравнения средних носит название «Критерий Стьюдента» (t-критерий). Данный критерий лёг в основу теории Рональда Фишера о степенях свободы и способствовал появлению мощного статистического метода: «Дисперсионный анализ» (Variance analysis).

Оценка достоверности разности средних производится после вычисления фактического значения t-критерия путём его сравнения с теоретически-ожидаемым.

Существующие статистические таблицы критических значений критерия Стьюдента (Приложение 1) позволяют делать выводы относительно принятия или отклонения нулевой гипотезы.

Основным требованием к первичным данным для использования t-критерия является их соответствие нормальному распределению. Существуют такие варианты критерия Стьюдента, как: «Одновыборочный t-критерий», «Двухвыборочный t-критерий для независимых выборок» и «Двухвыборочный t-критерий для зависимых выборок». В случае использования двухвыборочного критерия для независимых выборок следует брать для обработки выборки с условием равенства их дисперсий.

Способ вычисления двухвыборочного критерия Стьюдента для независимых выборок при незначительно отличающихся объёмах совокупностей базируется на упрощённом подходе:

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{s_{\bar{x}_1}^2+s_{\bar{x}_2}^2}},\ df=n_1+n_2-2 \quad (35)$$

При большой разнице в количестве наблюдений двух сравниваемых выборок (неравнозначные выборки) используют следующий способ определения, в результате которого определяемое фактическое значение *t*-критерия носит взвешенный характер:

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\sigma_1^2+(n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad (36)$$

Довольно часто в биологии исследователи сталкиваются с сопряжёнными совокупностями. В этом случае при сравнении средних арифметических применение выше приведённых формул приведёт к получению смещённых оценок. Для получения несмещённой оценки используют следующую формулу:

$$t=\frac{D_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}},\ df=n-1 \quad (37)$$

где $D_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$ – средняя разность значений,

σ_D – стандартное отклонение разностей.

Одновыборочный t-критерий применяется с целью сравнения эмпирической средней с каким-либо известным значением *A* на предмет их возможного отличия. С этой целью следуют формуле:

$$t = \bar{x} - \frac{A}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \bar{x} - \frac{A}{s_{\bar{x}}},\ df = n - 1 \quad (38)$$

Заменой приведённых способов, основанных на критерии Стьюдента можно рассматривать критерий Манна-Уитни (*U*-критерий – для независимых выборок) и Вилкоксона (*T*-критерий – для зависимых выборок).

Критерий Стьюдента для σ находят по формуле $t_\sigma = \frac{\sigma}{s_\sigma}$, (39)

для *Cv* - $t_{Cv} = \frac{Cv}{s_{Cv}}$, (40)

для *As*-$t_{As} = \frac{As}{s_{As}}$, (41)

если $t_{As} \geq 3$то он считается статистически недостоверным;

для *Ex*-$t_{Ex} = \frac{Ex}{s_{Ex}}$, (42)

если $t_{Es} \geq 3$то он считается статистически недостоверным.

Объединение параметров отдельных совокупностей. Если имеются значения объёма, средних арифметических и среднеквадратических отклонений по нескольким выборочным совокупностям, принадлежащим одной генеральной совокупности, то для уменьшения ошибки средней арифметической имеет смысл объединить их и рассчитать эти показатели для объединённой выборки. Для этого не обязательно опять проводить рутинную работу.

Сначала вычисляем объем общей выборки $n_{общ} = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum n$, (43)

Для расчёта $\bar{x}_{общ}$ применяют формулу $\bar{x}_{общ} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \ldots + n_k \bar{x}_k}{n_{общ}} = \frac{\sum n \bar{x}}{n_{общ}}$, (44) Чтобы найти $\sigma_{общ}$ необходимо совершить ряд обратных преобразований до дисперсий (S) в выборочных совокупностях:

- найти значения варианс (σ^2) каждой выборки, т.е. возвести в квадрат каждую σ;
- рассчитать дисперсию (S) из каждой вариансы по формуле $S_1 = \sigma_1^2 (n_1 - 1)$, (45) и т.д.;
- вычислить общую дисперсию $S_{общ} = S_1 + S_2 + \ldots + S_k = \sum S$, (46)
- теперь можно найти $\sigma^2_{общ}$ по обычной формуле $\sigma^2_{общ} = \frac{S_{общ}}{n_{общ} - 1}$, (47)
- далее: $\sigma_{общ} = \sqrt{\sigma^2_{общ}}$, (48)
- остальные показатели $Cv_{общ} = \frac{\sigma_{общ}}{\bar{x}} 100\,\%$, (49)

и $s_{\bar{x}_{общ}} = \frac{\sigma_{общ}}{\sqrt{n_{общ}}}$, (50)

Вопросы для самоконтроля

1. Какой исследователь первым предложил подход к сравнению выборочных совокупностей с помощью средних арифметических?
2. Сколько средних арифметических можно сравнить с помощью t-критерия?
3. Какие способы вычисления критерия Стьюдента вам известны?
4. На каких теоретических предпосылках основан дисперсионных анализ, и кто его разработал?
5. Какие ограничения существуют при использовании t-критерия?
6. Какие непараметрические аналоги критерия Стьюдента вам известны?

1.3 Статистические гипотезы и выбор статистического критерия

Формулирование гипотез систематизирует предположения исследователя и представляет их в чётком и лаконичном виде. Благодаря гипотезам исследователь не теряет путеводной нити в процессе расчётов и ему легко понять после их окончания, что, собственно, он обнаружил. Статистические гипотезы подразделяются на нулевые и альтернативные, направленные и ненаправленные.

Нулевая гипотеза - это гипотеза об отсутствии различий. Она обозначается как H_0 и называется нулевой потому, что содержит число 0: x_1- x_2=0, где x_1, x_2 - сопоставляемые значения признаков. Нулевая гипотеза - это то, что мы хотим опровергнуть, если перед нами стоит задача доказать значимость различий.

Альтернативная гипотеза - это гипотеза о значимости различий. Она обозначается как H_1. Альтернативная гипотеза - это то, что мы хотим доказать, поэтому иногда её называют *экспериментальной* гипотезой.

Проверка гипотез осуществляется с помощью критериев статистической оценки различий.

Ошибка первого рода (соответствует уровню статистической значимости, *p*). Ошибка первого рода заключается в отклонении нулевой гипотезы, в то время как она на самом деле должная быть принята. Принято обозначать такую ошибку символом α («альфа»).

Ошибка второго рода состоит в том, что принимается нулевая гипотеза, тогда, когда она самом деле отклоняется, которую принято обозначать символом β («бета»). Такую ошибку также называют мощностью критерия – это вероятность отклонения неправильной гипотезы.

Правило принятия и отклонения H_0. Правило принятия и отклонения нулевой гипотезы заключается в сравнении эмпирического и критического значений статистического критерия. Такой процесс можно представить графически, расположив соответствующие значения критериев λ и U на оси значимости (рис. 8).

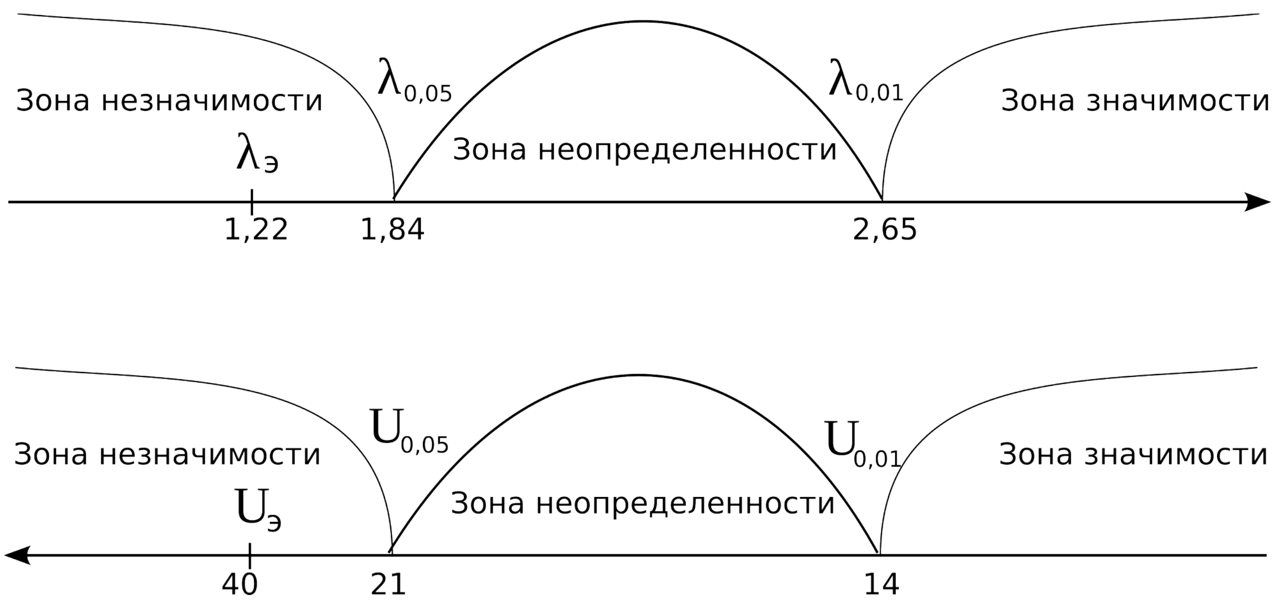


Рис. 8. Ось значимости

Уровни статистической значимости ($p < 0,05$; $p < 0,01$; $p < 0,001$) позволяют разбить ось на 3 зоны, что упрощает процесс принятия решений. Стоит отметить, что зона неопределённости рассматривается исследователями данных с позиций более критического подхода к оценке результатов обработки. Такая позиция допускает использование второго порога статистической значимости для отклонения нулевой гипотезы и принятия альтернативной. В зависимости от выбранного критерия вектор направления оси значимости может меняться.

Рандомизация данных

Рандомизация в статистике – это случайное распределение объектов выборочной совокупности в исследуемую (-ые) и контрольную (-ые) группы. При полной рандомизации выбор каждого объекта в группу определяется, например, подбрасыванием монеты, или с использованием списка случайных чисел, сгенерированных прикладным программным обеспечением. Таким образом, рандомизация – это способ, при котором выбор или распределение объектов осуществляются хаотично и носят случайный характер.

На результаты эксперимента существенное значение оказывает размер выборки, принципы её составления, т.е. выбор членов выборочной совокупности. Рандомизация помогает смягчить предвзятость отбора, способствует сходству исследуемых групп по важным известным и неизвестным факторам, искажающим результаты, а также способствует достоверности статистических тестов.

Выбор статистического критерия. Выбор алгоритма рандомизации, статистического критерия анализа экспериментальных данных (параметрического или непараметрического) и стратегии анализа (на основе рандомизации или популяционной модели) – очень важные факторы исследования.

Основная цель сравнительного исследования – обеспечить точное и достоверное сравнение. Для достижения этой цели дизайн исследования должен быть таким, чтобы: 1) предотвратить предвзятость; 2) обеспечить эффективное сравнение испытуемых групп; 3) упростить реализацию эксперимента для минимизации ошибок.

Валидность статистической процедуры означает, что она обеспечивает верные статистические выводы. Для любого дизайна исследования следует заранее определить стратегию анализа данных для решения основного вопроса исследования. При выборе того или иного статистического критерия (таблица 3) экспериментатор должен определиться, какие задачи будут решаться, и какие статистические тесты для этого будут выбираться. Статистические тесты в сравнительных исследованиях могут быть параметрическими или непараметрическими.

Алгоритм выбора статистического теста (критерия)

1. Определить класс данных (количественные или качественные).

2. Протестировать данные на нормальность распределения, что позволит

определить группу статистических критериев (параметрические или непараметрические).

3. Установить количество групп сравнения. Важно не забывать, что сравнивать группы 1 раз попарно в случае двух групп и 3 раза попарно в случае трех не одно и тоже. В этом случае происходит увеличение ошибки I рода при множественных сравнениях (например, следует уже использовать дисперсионный анализ, а не t-критерий Стьюдента).

4. Определить связаны ли сравниваемые группы между собой (т.е. являются зависимыми) или нет.

Таблица 3. Пример выбора статистического критерия для анализа результатов: сравнение групп

Признак	Две независимые группы	Более 2 независимых групп	Одна группа, связанные выборки	Одна группа, более двух связанных измерений
Параметрические методы				
Количественный (нормальное распределение)	Критерий Стьюдента	Дисперсионный анализ, критерий Стьюдента с поправкой Бонферрони	Критерий Стьюдента для зависимых выборок	Дисперсионный анализ повторных измерений
Непараметрические методы				
Количественный (распределение отличается от нормального)	U-критерий Манна-Уитни	Критерий Краскела-Уоллиса	Т-критерий Вилкоксона	Критерий Фридмана
Качественный	χ^2-критерий	χ^2-критерий	Критерий Мак-Немара	Критерий Кохрена

Таким образом, тот или иной статистический критерий используется на определенных данных и в условиях определенных групп. Поэтому, следует адекватно находить статистические критерии на основе логического выбора, что позволит получить корректные результаты и сделать правильные выводы.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные классы признаков в зависимости от их характера.
2. В каком случае идет речь о зависимых выборках? Приведите пример.
3. Каковы особенности использования критерия Мак-Немара?
4. В чем заключаются различия между параметрическими и непараметрическими методами обработки экспериментальных данных?
5. Какой метод используют для решения проблемы множественных сравнений?

1.4 Сравнение ожидаемых и эмпирических распределений и двух эмпирических распределений

Методы сравнения эмпирических и теоретически-ожидаемых распределений признаков относятся к большой категории непараметрических методов статистики. В отличие от параметрических методов данная группа не использует при вычислении соответствующих критериев параметров нормального распределения, к которым относятся среднее значение, статистические показатели, характеризующие изменчивость признака и объем совокупности. В этом случае появляется возможность проводить сравнительные исследования, не прибегая к t-критерию, который имеет ряд ограничений.

Например, представим, что существует потребность в сравнении некоторых хозяйств по уровню среднемесячного надоя. Предположим, что в первом хозяйстве применяется определённые технологии содержания и кормления животных, отличающаяся от таковых другого животноводческого предприятия. Такое положение дел приводит, в одном случае к появлению высокой изменчивости, в другом – к низкой. Вместе с тем, животные первого хозяйства представлены разными породами скота, а во втором имеются только представители одной. Подобные особенности, присущие первичным данным, далеко не единичны в практике и встречаются достаточно часто. Учитывая известные ограничения при использовании *t*-критерия Стьюдента необходим альтернативный подход при решении поставленной задачи. В нашем случае в качестве инструментария сравнения можно рассматривать непараметрические методы сравнения, которые могут также использоваться для тестирования степени соответствия распределений эмпирических данных теоретически-ожидаемым.

К непараметрическим критериям сравнения относят χ^2, λ (Смирнова-Колмогорова), Вилкоксона-Манна-Уитни и другие.

С помощью метода χ^2 можно сопоставить два эмпирических распределения по формуле:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_2 f_1 - n_1 f_2)^2}{f_1 + f_2} \cdot \frac{1}{n_1 \cdot n_2}, \qquad (51)$$

Если объемы сравниваемых совокупностей равны между собой, то приведенная формула может быть упрощена:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_1 - f_2)^2}{f_1 + f_2}, \qquad (52)$$

Сопоставление эмпирического распределения с теоретическим позволяет определить степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами. В свою очередь, сопоставление двух эмпирических распределений даёт возможность находить степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_m - f_\phi)^2}{f_m}, \qquad (53)$$

Представим себе, что исследователь занят совершенствованием технологии переработки колбасных изделий на перерабатывающем предприятии. Совпадение полученного распределения с равномерным его интересует гораздо в меньшей степени, чем увеличение потребительского спроса. Ему известно, что при добавлении специальных добавок – усилителей вкуса можно добиться повышения покупательской способности. Для своего производственного эксперимента исследователем был использован интенсификатор вкуса с тонкой пряной вкусовой нотой для колбас, мяса и готовых блюд (Е 621) - «Таст-Инт». При производстве колбасных изделий без данного усилителя вкуса с объемом партии в 100 кг было продано 87 кг колбасы. При добавлении «Таст-Инт» и выпуске продукции 50 кг колбасы было продано 45 кг. Необходимо ответить на вопрос: «Влияет ли добавление ароматизатора на увеличение покупательской активности?»

С помощью метода χ^2 он может сопоставить два эмпирических распределения: соотношение 100:87 в первой выборке и соотношение 50:45 во второй выборке.

Рабочая формула для расчёта χ^2

$$\chi^2=\sum\frac{(n_2 f_1-n_1 f_2)^2}{f_1+f_2}\cdot\frac{1}{n_1\cdot n_2}=\frac{(50\cdot 87-100\cdot 45)^2}{87+45}\cdot\frac{1}{50\cdot 100}=170{,}45\cdot 0{,}0002=0{,}034, \qquad (54)$$

df=1 (1 класс)

$\chi^2_{ст1}$=3,8 ($p<0{,}05$); $\chi^2_{ст2}$=6,6; $\chi^2_{ст3}$=10,8

Сравнивая полученный χ^2 со стандартными значениями, приходим к выводу о принятии H_0. Следовательно, добавление ароматизатора не влияет на изменение покупательской активности.

Аналогичным образом мы можем сопоставлять распределения выборов из трех и более альтернатив. Например, если исследуется варианты ответов дегустаторов на улучшение вкусовых качеств мясной продукции при добавлении трех видов вкусовых добавок в сочетании с использованием эмульгаторов. В выборке, представленной баллами, выставленными 90 дегустаторами, где использовалась вкусовая добавка А поставленные баллы варьировали от 1 до 5. С помощью метода χ^2 можно проверить, отличается ли это распределение от равномерного распределения или от распределения выбора варианта продукта в другой выборке, где дегустаторы оценивали вкусовые качества без использования усилителей вкуса. Распределение двух рядов представлено в таблице 4.

Таблица 4. Распределение баллов, выставленных дегустаторами

Балл	Частота распределения баллов, выставленных дегустаторами	
	добавка А	без добавки
1	30	10
2	20	25
3	25	40
4	11	10
5	4	5

$$\chi^2=\sum\frac{\left(f_1-f_2\right)^2}{f_1+f_2}=\frac{\left(30-10\right)^2}{30+10}+\frac{\left(20-25\right)^2}{20+25}+\frac{\left(25-40\right)^2}{15+40}+\frac{\left(11-10\right)^2}{11+10}+\frac{\left(4-5\right)^2}{4+5} \qquad (55)$$

$$\chi^2_{ф}=10+0,56+3,46+0,05+0,11=11,18$$

Определяем число степеней свободы: df=5-1=4

По специальной таблице находим критические значения критерия хи-квадрат для трёх уровней значимости:

$\chi^2_{ст1}$=9,5 ($p<0,05$);

$\chi^2_{ст2}$=13,3; ($p<0,01$);

$\chi^2_{ст3}$=18,5; ($p<0,001$);

Сравнивая полученный $\chi^2_{ф}$ со стандартными значениями, приходим к выводу о принятии H_1 с вероятностью 99%. Следовательно, добавление ароматизатора оказывает влияние на изменение вкусовых качеств продукции и, следовательно, выставляемые баллы.

Однако следует обратить внимание на характер распределения баллов в таблице. Очевидным видится тот факт, что добавление добавки в целом А снижает вкусовые качества выпускаемой продукции.

При сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим мы определяем степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами.

При сравнении двух эмпирических распределений мы определяем степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами, которые наблюдались бы в случае совпадения двух этих эмпирических распределений. Формулы расчёта теоретических частот будут специально даны для каждого варианта сопоставлений.

Чем больше расхождение между двумя сопоставляемыми распределениями, *тем больше* эмпирическое *значение* χ^2.

В некоторых случаях, при статистическом исследовании материала, имеется необходимость группировать данный в виде таблицы, где имеются сведения о частотах, полученных при действии на исследуемый объект какого-либо фактора (влияние удобрения на повышение урожайности с.-х. культур, влияние кормовой добавки на показатели продуктивности животных, влияние усилителей вкуса на повышение покупательской способности и т.д.). Так, при анализе 2 строк и 2 столбцов получаем четырёхпольные таблицы, 3-х строк и 3-х столбцов – шестипольные таблицы и т.д. Для выявления значимого влияния фактора на объект применяется *Ho*, которая подразумевает отсутствие рассматриваемого влияния.

Пример. Изучали влияние срока хранения молока на микробиологическую безопасность продукции (уровень обсеменённости плесневыми грибками – не более 10 КОЕ/см^3). Исследования по уровню содержания плесневых грибков проводили в свежем молоке (контрольная группа) и через 10 дней хранения при температуре +4°С (опытная группа). Получены следующие данные:

- контрольная группа – n_1=150, обнаружено 7 проб молока с превышением порогового уровня (10 КОЕ/см^3).
- опытная группа n_2=210, обнаружено 53 проб молока с превышением порогового уровня (10 КОЕ/см^3).

Представим входные данные в виде следующей таблицы (табл. 5)

Таблица 5. Влияние сроков хранения на уровень обсеменённости плесневыми грибками молочной продукции

Группы	ПДК на содержание плесневых грибков				Всего
	число проб молока с превышением ПДК		число проб молока без превышения ПДК		
Контрольная	7	25,0	143	125	150
Опытная	53	35,0	157	175	210
Всего	60		300		360

Данные приведённой таблицы демонстрируют фактические (эмпирические) и теоретические частоты, рассчитанные пропорционально объёмам исследуемых совокупностей. Таким образом, значимое отклонение фактически-наблюдаемых частот от теоретических будет свидетельствовать о влиянии фактора. В данном случае нулевая гипотеза отклоняется и принимается альтернативная.

Получение теоретических частот производили следующим образом:

$$\frac{60 \cdot 150}{360} = 25{,}0 \quad \frac{60 \cdot 210}{360} = 35{,}0 \quad \frac{300 \cdot 150}{360} = 125 \quad \frac{300 \cdot 210}{360} = 175$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_т - f_э)^2}{f_т} = \frac{(7-25)^2}{25} + \frac{(53-35)^2}{35} + \frac{(143-125)^2}{125} + \frac{(157-175)^2}{175} = 26{,}66, \qquad (56)$$

Рассчитаем число степеней свободы и определим уровень значимости полученного критерия. Число степеней свободы (*df)* рассчитывается следующим образом:

df=(число строк-1)·(число столбцов-1).

В нашем случае: *df*=(2-1)·(2-1)=1

Определяем стандартные значения χ^2 при *df*=1:

$\chi^2_{ст1}$=3,8 (p<0,05); $\chi^2_{ст2}$=6,6; $\chi^2_{ст3}$=10,8

Таким образом, сравнивая фактическое значения критерия χ^2, приходим к выводу о принятии альтернативной гипотезы и опровержении нулевой. Вывод: хранение молока в течение 10 и более дней при определённых условиях приводит к увеличению содержания плесневых грибков в молоке с вероятностью 99,9% (p<0,001).

При обработке четырёхпольных таблиц можно воспользоваться более простым методом, основанном на обозначении частот буквами латинского алфавита. Обработаем рассматриваемый нами пример новым методом. Построим таблицу и внесём необходимые обозначения (табл. 6).

Полученный результат аналогичен тому, какой мы получили в прошлом примере, т.е. нулевая гипотеза отвергается.

Таблица 6. Расчёт критерия χ^2 альтернативным методом

Группы	ПДК на содержание плесневых грибков				Всего
	число проб молока с превышением ПДК		число проб молока без превышения ПДК		
Контрольная	7	a	143	b	$a+b$=150
Опытная	53	c	157	d	$c+d$=210
Всего	$a+c$=60		$b+d$=300		$n=a+b+c+d$=360

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2 \cdot n}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)} =$$

$$= \frac{(1099-7579)^2 \cdot 360}{(7+53)(143+157)(7+143)(53+157)} = \frac{15116544000}{60 \cdot 300 \cdot 150 \cdot 210} = 26{,}66, \qquad (57)$$

В случаях, когда наблюдается резкое колебание частот в таблице или малый объём исследуемых совокупностей, то прибегают к применению поправки Йейтса. Рассчитаем критерий χ^2 с учётом этой поправки.

$$\chi^2 = \frac{\left[|ad-bc| - \frac{n}{2}\right]^2 \cdot n}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)} = \frac{\left[|1099-7579| - \frac{360}{2}\right]^2 \cdot 360}{60 \cdot 300 \cdot 150 \cdot 210} = \frac{14288400000}{567000000} = 25{,}2, \qquad (58)$$

Как видно из результатов расчётов, нулевая гипотеза опять отвергается.

Применение критерия χ^2сопряжено с некоторыми ограничениями:

1. Объем выборки должен быть относительно большим ($n \geqq 30$), так как в противном случае критерий может принимать приближенные значения.
2. Частота каждой градации должна быть равна или больше 5.
3. Варианты, участвующие в группировке, должны быть разнесены по классам таким образом, чтобы не наблюдалось их дублирования в соседних классах (неперекрещивающиеся варианты).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие статистические методы можно отнести к непараметрическим?

2. В чем состоят отличия t-критерия Стьюдента от соответствующих непараметрических критериев?
3. Перечислите существующие ограничения критерия χ^2
4. С какой целью применяются многопольные таблицы?

1.5 Оценка связи между признаками

В области биологической статистики связь делится на две категории: **функциональную** и **коррелятивную.**

Функциональная связь нашла своё распространение преимущественно в области точных наук и характеризует всегда прогнозируемое изменение сопряжённого признака при изменении другого на определённую величину. В области физики в качестве ярких примеров такой связи можно привести изменение высоты столбика термометра при колебаниях температуры среды или увеличение уровня мощности электрического прибора при подаче большего напряжения или силы тока.

Случайная компонента вносит важный вклад в изменчивость признаков и ведёт к необходимости изменять подходы к изучению наблюдаемых зависимостей. Такие зависимости рождают появление другого вида связей (коррелятивные связи).

Вычисление коэффициента корреляции Пирсона осуществляется по формуле:

$$r_{xy}=\frac{\sum t_x \cdot t_y}{n-1}, \qquad (59)$$

Значение коэффициента корреляции колеблется в пределах от -1 до 1. Нормированные отклонения, применяемые выше, можно оценить с помощью следующих формул:

$$t_x=\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_x}, t_y=\frac{y_i-\bar{y}}{\sigma_y}, \quad (60)$$

Заменяя t_xи t_y, получаем:

$$r_{xy}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)\sigma_x\sigma_y}=\frac{cov_{xy}}{(n-1)\sigma_x\sigma_y}, \qquad (61)$$

Совместная изменчивость выражается в виде суммы произведений разностей вариант и средней арифметической и называется ковариацией (cov_{xy}).

Появившиеся стандартные отклонения легко оценить с помощью приведённых ранее подходов:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}}\,\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{n-1}}\,, \qquad (62)$$

Произведём соответствующие изменения в рабочей формуле:

$$r_{xy}=\frac{\sum x_i y_i-\frac{\sum x_i\cdot\sum y_i}{n}}{(n-1)\cdot\sqrt{\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}\cdot\frac{\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{n-1}}}, \qquad (63)$$

Упростим наше уравнение путём сокращения и заменами соответствующими символами:

$$r_{xy}=\frac{\sum x_i y_i-\frac{\sum x_i\cdot\sum y_i}{n}}{\sqrt{S_x\cdot S_y}}, \qquad (64)$$

В конечном результате мы получили рабочую формулу вычисления линейного коэффициента корреляции Пирсона.

Ошибка коэффициента корреляции. Так как коэффициент корреляции вычислен не по генеральной, а по выборочной совокупности, он имеет ошибку выборочности:

$$s_{r_{xy}}=\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}, \qquad (65)$$

где $s_{r_{xy}}$-ошибка выборочности коэффициента корреляции;

$r_{x/y}$ -коэффициент корреляции;

n - число пар, по которым определён $r_{x/y}$.

$df=n$-2.

Достоверность коэффициента корреляции. Когда известна ошибка, можно определить степень достоверности $r_{x/y}$. При этом исходят из нулевой гипотезы, т. е. предполагают, что в генеральной совокупности связь между изучаемыми признаками отсутствует. Только при значении t_r, равном табличному значению (t_{st} с учётом числа степеней свободы df n-2, см. приложение 1) или больше его (при вероятности 0,95; 0,99 или 0,999), нулевая гипотеза отвергается, и значение $r_{x/y}$ будет достоверным.

Пример вычисления коэффициента корреляции Пирсона. Приведём пример и оценим наличие сопряжённости парных признаков. Имеются данные об уровне в молоке жира и белка (табл. 7).

Как было показано ранее, оценить степень сопряжённости признаков возможно через определение произведений нормированных отклонений. Это позволит судить о величине совместной изменчивости парных признаков и определить коэффициент корреляции Пирсона.

Рассчитаем значение коэффициента корреляции Пирсона используя сумму произведений нормированных отклонений:

$$r_{xy} = \frac{\sum t_x \cdot t_y}{n-1} = \frac{11{,}41}{25-1} = 0{,}475, \quad (66)$$

Оценка коэффициента только по его величине не является полной. Обязательно необходимо проверять его статистическую значимость, позволяющую оценить степень совместной изменчивости. С этой целью определим ошибку коэффициента корреляции:

$$s_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}475^2}{25-2}} = 0{,}183, \quad (67)$$

Ошибку коэффициента корреляции следует всегда указывать совместно с самим коэффициентом ($r_{xy} \pm s_{r_{xy}}$), как показано на примере наших данных $-0{,}475 \pm 0{,}183$.

Оценим достоверность коэффициента корреляции:

$$t_r = \frac{r_{xy}}{s_{rxy}} = \frac{0{,}475}{0{,}183} = 2{,}6, \quad (68)$$

Таблица 7. Определение произведений нормированных отклонений

№ п/п	Содержание в молоке						
	жир, %	белок, %	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	t_x	t_y	$t_x \cdot t_y$
1	4,2	3,8	0,44	0,27	1,6	1,14	1,82
2	3,8	3,5	0,04	−0,03	0,16	−0,14	−0,02
3	4,3	3,9	0,54	0,37	1,96	1,56	3,06
4	3,8	3,7	0,04	0,17	0,16	0,71	0,11
5	3,8	3,8	0,04	0,27	0,16	1,14	0,18
6	3,7	3,6	−0,06	0,07	−0,2	0,29	−0,06
7	3,8	3,5	0,04	−0,03	0,16	−0,14	−0,02
8	3,7	3,5	−0,06	−0,03	−0,2	−0,14	0,03
9	3,5	3,4	−0,26	−0,13	−0,92	−0,56	0,52
10	4,2	3,9	0,44	0,37	1,6	1,56	2,5
11	3,8	3,6	0,04	0,07	0,16	0,29	0,05
12	3,2	3,1	−0,56	−0,43	−2,01	−1,83	3,68
13	3,7	3,5	−0,06	−0,03	−0,2	−0,14	0,03
14	3,8	3,6	0,04	0,07	0,16	0,29	0,05
15	3,7	3,5	−0,06	−0,03	−0,2	−0,14	0,03
16	3,9	3,7	0,14	0,17	0,52	0,71	0,37
17	3,8	3,5	0,04	−0,03	0,16	−0,14	−0,02
18	3,5	3,2	−0,26	−0,33	−0,92	−1,41	1,3
19	3,8	3,4	0,04	−0,13	0,16	−0,56	−0,09
20	3,7	3,4	−0,06	−0,13	−0,2	−0,56	0,11
21	3,5	3,2	−0,26	−0,33	−0,92	−1,41	1,3
22	3,3	3,3	−0,46	−0,23	−1,65	−0,98	1,62
23	3,3	4	−0,46	0,47	−1,65	1,98	−3,27
24	4,1	3,2	0,34	−0,33	1,24	−1,41	−1,75
25	4	3,5	0,24	−0,03	0,88	−0,14	−0,12

Если коэффициент принимает высокие значения, уровень совместной изменчивости высоки и объем совокупностей невысок, то следует с осторожностью подходить к окончательным выводам относительно коррелированности признаков.

Попытаемся протестировать наличие корреляционной зависимости с помощью другого подхода, основанного на построении корреляционной решётки и метода условных отклонений. С этой целью разобьём наши выборки на классы, определим парные частоты и занесём их в соответствующие ячейки таблицы 8.

Таблица 8. Корреляционная решётка

y / *x*	*3,1* *3,2*	*3,3* *3,4*	*3,5* *3,6*	*3,7* *3,8*	*3,9* *4*	f_y	a_y	a_y^2	$f_y \cdot a_y$	$f_y \cdot a_y^2$
3,2 3,3	1	1			1	3	−3	9	−9	27
3,4 3,5	2	1				3	−2	4	−6	12
3,6 3,7		1	4			5	−1	1	−5	5
3,8 3,9		1	5	3		9	0	0	0	0
4 4,1	1		1			2	1	1	2	2
4,2 4,3				1	2	3	2	4	6	12
f_x	4	4	10	4	3	25			$\sum = -\mathbf{12}$	$\sum = \mathbf{58}$
a_x	−2	−1	0	1	2					
a_x^2	4	1	0	1	4					
$f_x \cdot a_x$	−8	−4	0	4	6	$\sum = -\mathbf{2}$				
$f_x \cdot a_x^2$	16	4	0	4	12	$\sum = \mathbf{36}$				

По корреляционной решётке определим сумму произведений частоты совместного варьирования в каждой ячейке (f') и условных отклонений по каждому коррелируемому признаку (a_x и a_y):

$$\sum f'a_x a_y = 1\cdot(-2)\cdot(-3)+2\cdot(-2)\cdot(-2)+1\cdot(-1)\cdot(-3)+1\cdot(-1)\cdot(-2)+1\cdot(-1)\cdot(-1)+1\cdot 2\cdot(-3)+ \\ +1\cdot 1\cdot(-2)+1\cdot 1\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2=22, \quad (69)$$

Для определения величины коэффициента корреляции необходимо установить ряд промежуточных показателей, которые приведены в таблице 9.

Таблица 9. Промежуточные показатели необходимые для вычисления коэффициента корреляции

Показатель	Признак	
	y	x
n	25	25
$\sum f \cdot a$	-2	-12
$\sum f \cdot a^2$	36	58
$h = \frac{\left(\sum f \cdot a\right)^2}{n}$	0,16	5,76
$S = \sum f \cdot a^2 - h$	35,84	52,24

Все необходимые показатели установлены. Рассчитаем значение линейного коэффициента корреляции Пирсона:

$$r_{xy} = \frac{\sum f' a_x a_y - \frac{\sum f_x a_x \cdot \sum f_y a_y}{n}}{\sqrt{S_x \cdot S_y}} = \frac{22 - \frac{-2 \cdot (-12)}{25}}{\sqrt{35,84 \cdot 52,24}} = 0,486, \qquad (70)$$

Полученный коэффициент может говорить о положительной связи коррелируемых признаков только в том случае, когда принимается альтернативная гипотеза ($p \leq 0,05$). С целью окончательной оценки коэффициента Пирсона определим его ошибку:

$$s_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,486^2}{25-2}} = 0,182, \qquad (71)$$

Найдём критические значения критерия Стьюдента при разных уровнях значимости с помощью специальной таблицы ($df = n$-2 =25-2=23). Критические уровни составят величины:

$t_{ф1}$=2,1 (p<0,05); $t_{ф2}$=2,8 (p<0,01); $t_{ф3}$=3,8 (p<0,001).

Определим достоверность коэффициента корреляции по формуле:

$$t = \frac{r_{xy} - p}{s_{r_{xy}}} = \frac{r_{xy}}{s_{r_{xy}}} = \frac{0,486}{0,182} = 2,67, \qquad (72)$$

В нашем случае принимается альтернативная (экспериментальная) гипотеза, свидетельствующая о наличии связи между уровнями белка и жира в молоке (p<0,05).

Ранговый коэффициент корреляции Спирмена. Если связь переменных нелинейна, то лучшие результаты даёт использование непараметрического коэффициента корреляции Спирмена, основанного на учёте не фактических значений переменных, а ранга порядка наблюдения в выборке по данному признаку. Использование этого коэффициента не требует нормального распределения объектов совокупности.

Ранговый коэффициент корреляции Спирмена наиболее простой, но менее точный параметр, позволяющий установить связь между признаками. Его особенность состоит в том, что он даёт возможность определить связь между признаками таких совокупностей, для которых неизвестно, имеют ли они нормальное распределение или характеризуются другим типом распределения. Кроме того, с помощью этого коэффициента можно установить связь между признаками, которые не могут быть определены точно, а выражаются порядком занимаемого места каждым членом совокупности, т.е. местом ранга в вариационном ряду. Поэтому в обработку включаются не абсолютные величины варьирующего признака, а порядковые места или ранги, занятые членами совокупности по каждому из коррелируемых признаков.

Формула рангового коэффициента корреляции следующая:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum (x-y)^2}{n(n^2-1)}, \qquad (73)$$

где x и y – ранги по каждому признаку; n - число членов в совокупности.
Формула может быть упрощена, если выражение $(x\text{-}y)^2$ заменить на D^2. Тогда:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum D^2}{n(n^2-1)}, \quad (74)$$

Из приведённой формулы видно, что показателем корреляции служит сумма квадратов отклонений между парными рангами обоих признаков. Для этого члены выборки записывают по порядку, по величине ранга одного из признаков, от максимального к минимальному уровню ранга. При этом ранги будут такие: 1, 2, 3, ..., *n.* Ранг, занимаемый членом совокупности по второму признаку, выписывают для каждого члена ряда с учётом фактического уровня второго признака.

Если фактическая абсолютная величина признака у нескольких членов выборки будет одинаковая, то их нумеруют подряд и берут среднее из этих рангов. Например, для членов совокупности с одинаковым абсолютным значением признака, получивших порядковый ранг 3 и 4, будет записана для каждого члена величина среднего ранга, т.е. 3,5.

Рассмотрим пример. Знания дисциплины проверены по двум тестам у 11 студентов. Проанализируем связь между оценками по этим тестам (табл. 10).

Таблица 10. Первичные данные для определения коэффициента корреляции Спирмена

Тест 1 (x)	Ранг (x_i)	Тест 2 (y)	Ранг (y_i)	D^2
80	8,5	62	9	0,25
54	2	45	1	1
56	4,5	54	5	0,25
60	6,5	54	5	2,25
85	10,5	63	10	0,25
85	10,5	68	11	0,25
56	4,5	54	5	0,25
54	2	48	2	0
60	6,5	56	7	0,25
80	8,5	60	8	0,25
54	2	49	3	1
				$\sum$= 6

Подставив полученные данные в формулу рангового коэффициента корреляции, получаем r_s = 0,97, s_r = 0,077. Оценив достоверность коэффициента t_{st} = 12,58, делаем вывод о том, что установлена высокая связь между оценками за тест 1 и тест 2 (p<0,001) при $df=n-2=11-2=9$.

Коэффициент регрессии. Коэффициент корреляции указывает только на степень связи между признаками. В некоторых случаях необходимо знать характер изменения одного признака в зависимости от изменения другого. Для этих целей используется регрессионный анализ. *Коэффициент регрессии* показывает, на сколько изменится один признак при изменении второго на единицу. Вычисляют по формулам:

$$b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{cov(x,y)}{var(x)} \text{ и } b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{cov(x,y)}{var(y)}, (75).$$

Рассматриваемые коэффициенты регрессии не равны ($b_{x/y} = b_{y/y}$)

В общих чертах регрессионный анализ (*regressio* (лат.) – наклонение, склонение) преследует ту же цель, что и корреляционный – измерить величину связи между переменными. Однако, начиная с представления взаимодействия переменных, имеются существенные отличия:

– регрессионный анализ (РА) даёт возможность графически представить результат – в виде линии, стремящейся максимально точно представить зависимость одной переменой от другой (других).
– корреляционный анализ оставляет вопрос о причинно-следственных отношениях между переменными. Регрессионный анализ предполагает, что до начала анализа этот вопрос решён исследователем и известна одна зависимая переменная, на которую могут влиять другие.
– В рамках РА имеет смысл понятие предсказания – значений зависимой переменной (отклика) от независимых. Отсюда и другое название независимой переменной – *predictor* (предсказатель). Однако практическое применение этого свойства РА имеет ограничения.

Используя те же данные, что и корреляционный анализ (КА), алгоритм регрессионного анализа пытается подобрать такую линию, которая бы наилучшим образом описывала функциональную зависимость переменной *y* от переменной *x*. В качестве критерия качества описания, как правило, используется сумма квадратов отклонений координат экспериментальных точек от предполагаемой линии. Простейший частный случай – линейная регрессия, т. е. зависимость от одной переменной.

Коэффициенты регрессии отражают связь между признаками двусторонне, учитывая изменение средней величины признака Y при изменении значений x_i признака X, и, наоборот, показывают изменение средней величины признака X по изменённым значениям y_i признака Y. Однако исключение составляют ряды динамики, показывающие изменение признаков во времени и, как следствие, регрессия таких рядов является односторонней.

Вопросы для самоконтроля

1. На что указывает знак коэффициент корреляции?
2. К методам какой статистики относится ранговый коэффициент корреляции?
3. С какой целью необходимо оценивать статистическую значимость (достоверность) коэффициента корреляции?
4. В каких пределах варьирует значение коэффициента корреляции?
5. В каких случаях вычисляют одностороннюю регрессию?

1.6 Методы обработки качественных признаков

Признаки с альтернативной изменчивостью. Биномиальное распределение характерно для признаков с альтернативной изменчивостью. Таковыми признаками являются качественные, включающие два класса (градации), соответствующих, например, наличию и отсутствию у объекта того или иного качества.

Описание качественных признаков состоит в том, чтобы подсчитать число объектов, имеющих одно и тоже значение, или определить долю того или иного значения от общего числа объектов выборки. Исходя из этого, средняя арифметическая для качественных признаков отражает долю или процент особей, имеющих тот или иной признак. Например, на одном из сельскохозяйственных предприятий из 12000 свиней 230 голов заболело колибактериозом, остальные 11770 голов были здоровые. В этом случае анализируемая совокупность состоит из двух групп: первая - больные животные, вторая - здоровые. Численность первой группы обозначим *P,* численность второй - *Q,* общую численность - *n.* Тогда долю больных (т. е. имеющих изучаемый признак) животных *(p)* определяют по формуле:

$$p = \frac{P}{n} = \frac{230}{12000} = 0,019 \text{ или } 1,9\ \%, \quad (76)$$

Здесь *p* соответствует средней арифметической *(*$\bar{x}$*)*при количественной изменчивости. Доля здоровых животных *(q)* составляет:

$$q = \frac{Q}{n} = \frac{11770}{12000} = 0,981 \text{ или } 98,1\ \%, \quad (77)$$

Сумма частот $p+q=1$.

Среднее квадратическое отклонение вычисляют по формуле:

$$\sigma = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{0,019 \cdot 0,981} = 0,14 \quad \text{или } 14\ \%, \quad (78)$$

Выборочная частота качественного признака, выраженная в долях единицы или в процентах, также имеет стандартную ошибку, которая вычисляется по формуле:

$$s_p=\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{\mathrm{p\cdot q}}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}019\cdot 0{,}981}{12000}}=0{,}001 \text{ или } 0{,}1\%. \quad (79)$$

Стандартная ошибка является одинаковой как для доли больных, так и доли здоровых животных:

$p \pm s_p$ = 0,019 ± 0,001; $q \pm s_q$ = 0,981 ± 0,001, или 1,9 ± 0,1 и 98,1 ± 0,1%.

В некоторых случаях, в частности при небольшом объёме выборки, число наблюдений может равняться нулю. Такой результат должен классифицироваться случайным, и стандартная ошибка нулевого значения выборочной доли или процента будет определена методом Б.Л. Ван-дер-Вардена. Так, например, среди 250 кроликов породы белый великан не зарегистрировано случаев альбинизма. Однако это не означает, что в данной породе эта аномалия не встречается. С помощью метода Ван-дер-Вардена спрогнозируем вероятность рождения альбиносов в других выборочных совокупностях.

Частота (доля) будет оценена следующим образом:

$$p=\frac{(P+1)\cdot 100}{n+2}=\frac{(0+1)}{250+2}=0{,}397\% \text{ или } 0{,}004, \quad (80)$$

Стандартная ошибка выборочной частоты (доли):

$$s_p=\sqrt{\frac{p(100-p)}{n+3}}=\sqrt{\frac{pq}{n+3}}=\sqrt{\frac{0{,}397\cdot 99{,}603}{253}}=0{,}395\% \text{ или } 0{,}004, \quad (81)$$

Сравнение средних величин признаков с дискретным характером изменчивости осуществляют с помощью метода φ (φ-преобразование) при p<0,25 и q>0,75 или наоборот. Оценку разности углов φ_1и φ_2 в радианах проводят с применением критериев F и Z. Критерий Фишера вычисляют по формуле:

$$F=(\phi_1-\phi_2)^2\cdot\frac{n_1\cdot n_2}{n_1+n_2},\ (82)$$

В свою очередь, критерий Z определяют по следующей формуле:

$$Z=(\phi_1-\phi_2)\cdot\sqrt{\left(\frac{n_1\cdot n_2}{n_1+n_2}\right)},\ (83)$$

где φ_1 и φ_2 выборочные углы, определяемые по таблице приложения 5;

n_1 и n_2 – объёмы выборочных совокупностей.

Оценку статистической значимости полученных результатов выполняют по таблицам ожидаемых значений преобразованного критерия Фишера (F-критерий) и таблицы вероятности значений t-распределения Стьюдента (Z).

При использовании изучаемого метода необходимо быть внимательным и учитывать следующий ряд ограничений, ассоциируемых с объёмами сравниваемых совокупностей:

1) в случае, когда в одной выборке имеется 2 наблюдения, во второй должно быть не менее 30 (соблюдается соотношение: n_1=2 →n_2≥30);
2) в случае, когда в одной из выборок имеется 3 наблюдения, во второй должно быть не менее 7 (соблюдается соотношение: n_1=3 →n_2≥7);
3) в случае, когда в одной выборке имеется 4 наблюдения, во второй должно быть не менее 5 (соблюдается соотношение: n_1=4 →n_2≥5);
4) в случае, когда в одной выборке имеется 5 и более наблюдений, то второй может быть любое количество вариант.

Рассмотрим на примере использование метода φ-преобразования Фишера.

Оценим достоверность различий между выборочными частотами двух выборочных совокупностей.

n_1=200	n_2=205
p_1=0,06	p_2=0,02
q_1=0,94	q_2=0,98
φ_1=0,4949	φ_2=0,2838

df_1=2-1, df_2= n_1+n_2-2=403.

Находим фактическое значение критерия Фишера F=4,5. Сравнив эту величину со стандартными значениями критерия Фишера (F_1=3,9; F_2=6,7; F_3=11,0), делаем вывод о достоверности различий между выборочными долями двух выборочных совокупностей (p<0,05).

Коэффициент корреляции между альтернативными признаками (r_a). Для установления связи между альтернативными признаками строят четырёхпольную корреляционную решётку (табл. 11).

Таблица 11. Организация четырёхпольной корреляционной решётки

Дочери (y)	Матери (x)		Всего
	больные	здоровые	
Больные	a =	b =	$a + b$ =
Здоровые	c =	d =	$c + d$ =
Всего	$a + c$ =	$b + d$ =	$n = a + b + c + d$ =

Коэффициент корреляции вычисляют по формуле

$$r_a = \frac{(ad - bc) - \frac{n}{2}}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}, \qquad (84)$$

где a, b, c, d - частоты, распределившиеся в четырёх клетках.

Пример. В опыте было получено 100 помесных цыплят среди которых 45 петушков имели светлую окраску пуха, а 5 были полосатые; три курочки имели светлую окраску пуха, а 47 полосатую. По приведённым данным определить коэффициент корреляции и его достоверность. Ход решения приведён в четырёхпольной таблице 12.

Таблица 12. Организация четырёхпольной корреляционной решётки

Пол цыплят	Тип пигментации		Всего
	светлые	полосатые	
Петушки	a=45	b=5	a+b=50
Курочки	c=3	d=47	c+d=50
Всего	a+c=48	b+d=52	n=a+b+c+d=100

Вычислим коэффициент корреляции.

$$r_a = \frac{(45\cdot 47 - 5\cdot 3) - \frac{100}{2}}{\sqrt{(45+5)(3+47)(45+3)(5+47)}} = 0{,}82, \quad (85)$$

$$s_{r_a} = \sqrt{\frac{1-r_a^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}82^2}{100-2}} = 0{,}058, \quad (86)$$

Оценим достоверность коэффициента корреляции:

$$t_r = \frac{r_a}{s_{ra}} = \frac{0{,}82}{0{,}058} = 14{,}13, \quad (87)$$

$$df = n\text{-}2 = 100\text{-}2 = 98$$

Табличные значения t_{st}= *2,0 (p<0,05); 2,6 (p<0,01); 3,4 (p<0,001).*

Коэффициент регрессии вычисляют по формулам

$$b_{y/x} = \frac{ad-bc}{(a+c)(b+d)}, \quad (88)$$

$$b_{x/y} = \frac{ad-bc}{(a+b)(c+d)}, \quad (89)$$

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключаются различия между признаками с количественной и качественной изменчивостью?

2. При каком условии распределение Пуассона рассматривается как частный случай биномиального распределения?

3. Что представляет собой средняя арифметическая для качественных признаков?

4. В каком случае используется метод Ван-дер-Вардена?

5. Укажите условия использования φ–преобразования?

1.7 Дисперсионный анализ

Дисперсионный анализ - это анализ изменчивости признака под влиянием каких-либо контролируемых переменных факторов. В зарубежной литературе дисперсионный анализ часто обозначается как ANOVA, что переводится как анализ вариативности (Analysis of Variance). Автором метода является английский математик и биолог Р.А. Фишер (Fisher R.A., 1918, 1938). В русском переводе этот раздел статистики известен как *дисперсионный анализ.*

Задача дисперсионного анализа состоит в том, чтобы из общей вариативности признака вычленить вариативность троякого рода:

а) вариативность, обусловленную *действием каждой* из исследуемых независимых переменных;

б) вариативность, обусловленную *взаимодействием* исследуемых независимых переменных;

в) *случайную* вариативность, обусловленную всеми другими неизвестными переменными.

Вариативность, обусловленная действием исследуемых переменных и их взаимодействием, соотносится со случайной вариативностью. Показателем этого соотношения является критерий F - Фишера.

Таким образом, сущность дисперсионного анализа (ДА) состоит в установлении роли отдельных факторов в изменчивости признака. Известно, что многие признаки и свойства организмов находятся под влиянием наследственности и условий среды. Так, устойчивость животных к туберкулезу, бруцеллёзу, лейкозу зависит от наследственности матери и отца, возраста, пола, уровня кормления и содержания и многих других факторов. Это приводит к возникновению огромной изменчивости признаков. С помощью ДА можно установить достоверность и силу влияния, а также относительную роль одного или нескольких факторов в общей изменчивости признака.

Общая изменчивость признака выражается общей вариансой $\sigma^2_{\text{общ}}$ и может быть разложена на изменчивость, зависящую от изучаемых факторов (факториальная или межгрупповая, межградационная - $\sigma^2_{мг}$), (σ^2_{A}, σ^2_{B} *и др.*), и изменчивость, обусловленную неучтёнными (случайными) факторами ($\sigma^2_{сл}$). Если учитываем 1 фактор, то модель ДА будет выглядеть:

$x_{ij} = \mu \pm A_i \pm e_{ij}$, ,

где x_{ij}-значение зависимого признака;

μ - среднее значение совокупности;

A_i - величина отклонения зависимого признака, связанная с действием фактора;

e_{ij}- величина отклонения зависимого признака, связанная с действием случайных факторов.

Приведённую схему по одному измеренному признаку, можно перенести на анализ вариации многих измерений и выразить всё в вариансах σ^2:

$\sigma^2_{общ} = \sigma^2_{факториальная\ (мг)} + \sigma^2_{случайная}$ (90)

Если два фактора:

$x_{ijk} = \mu \pm A_i \pm B_j \pm (A_i \times B_j) \pm e_{ijk}$,

где x_{ijk}- значение анализируемого признака;

μ -среднее значение совокупности;

A_i-величина отклонения зависимого признака, связанная с действием фактора А;

B_j- величина отклонения зависимого признака, связанная с действием фактора В;

$(A_i \times B_j)$ - величина отклонения зависимого признака, связанная с взаимодействием факторов A_i *и* B_j;

$e_{ijк}$ - величина отклонения зависимого признака, связанная с действием случайных факторов.

Выразим в вариансах:

$\sigma^2_{общ} = \sigma^2_{A} + \sigma^2_{B} + \sigma^2_{AB} + \sigma^2_{случайная}$, (91) *Дисперсионный комплекс* – это организованные, сгруппированные данные в форме таблицы для дальнейшей их обработки и анализа.

Различают следующие дисперсионные комплексы:

1. В зависимости от компоновки материала выделяют случайн ые и фиксированные комплексы.

Случайные комплексы – различия между градациями не имеют чётких границ, не фиксируются (например, при изучении генетического разнообразия в популяции, когда берётся случайная выборка генотипов из популяции и устанавливается степень различий между индивидами, возникающая по генетическим причинам).

Фиксированные комплексы – когда градации фактора точно установлены (например, изучается влияние сезона года на молочную продуктивность коров, доз удобрений на урожайность с/х культур).

2. Сколько факторов в дисперсионном анализе – *одно-; двух-; трех-; n-*факторные комплексы.

Например, изучается влияние на урожайность 3-х сортов риса (фактор А) 2-х различных доз удобрения (фактор В) по результатам нескольких испытаний. Необходимо выяснить: 1) Существуют ли различия в урожайности между сортами риса при внесении двух разных доз удобрения? 2) Существует ли разница в урожайности риса при обработке 2-мя различными дозами удобрения в каждом сорте? 3) Имеется ли взаимодействие урожайности трех сортов риса при внесении двух разных доз удобрения? 4) Каково влияние случайных (неучтённых) факторов?

3. Количество материала внутри градаций – *равномерные* и *неравномерные* комплексы. Если в градации содержится одинаковое количество вариант, то такой комплекс называется равномерным, если разное количество - неравномерным.
4. Свойства признака – *количественные* или *качественные*.

Например, количественные - изучается влияние доз удобрений на урожайность озимой или яровой пшеницы, или сезона отёла на удой коров и др.

Для признаков с альтернативной изменчивостью - анализируется частота хромосомных аномалий на цитологических препаратах. Просматривается серия препаратов и на каждом из них исследуется несколько ядер. На разных препаратах из числа просмотренных ядер встречается различное число аномальных ядер и возникает вопрос: какова изменчивость между отдельными препаратами (межгрупповая изменчивость) и между ядрами внутри препарата (случайная изменчивость).

Организация и анализ однофакторного дисперсионного комплекса для случайной модели. Схема организации однофакторного дисперсионного комплекса в общем виде представлена в таблице 13.

Таблица 13. Схема организации однофакторного дисперсионного комплекса

Признак	Градации				
	1	2	3	...	*i*
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	...	x_{i1}
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	...	x_{i2}
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	...	x_{i3}
...	...	...	...	...	...
j	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	...	x_{ij}
Итого	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$		$\bar{x}_i, \bar{x}_{общ}$

Межгрупповая дисперсия ($S_{мг}$), характеризующая межградационные взаимодействия (при равномерном комплексе) вычисляется по формуле:

$$S_{мг} = n_i \sum \left(\bar{x}_i - \bar{x}_{общ} \right)^2, \quad (92)$$

где $\bar{x}_i$ – средние арифметические значения признаков по градациям;

$\bar{x}_{общ}$ – средние арифметические значения признаков внутри градаций;

n_i – объем совокупности по градациям.

Случайная дисперсия ($S_{сл}$), отражающая влияние случайных факторов вычисляется по формуле:

$$S_{сл} = \sum \left[\sum \left(x_{ij} - \bar{x}_i \right)^2 \right], \quad (93)$$

где x_{ij} - значение отдельной варианты признака.

Пример. Определить влияние производителя на содержание жира в молоке дочерей за 305 дней лактации.

Организуем дисперсионный комплекс и установим ряд промежуточных показателей с целью последующей оценки показателей изменчивости (табл. 14).

Таблица 14. Организация однофакторного равномерного дисперсионного комплекса, случайная модель

Номер лактации дочерей	Содержание жира в молоке (%) за 305 дней лактации дочерей разных производителей			Сумма
	бык 1	бык 2	бык 3	число градаций, r=3
№1	3,5	3,8	3,2	
№2	3,7	3,7	3,5	
№3	3,8	3,9	3,4	
№4	3,4	3,7	3,3	
№5	3,5	3,5	3,3	
n_i	5	5	5	$N=\sum n_i = 15$
$\bar{x}_i$	3,58	3,72	3,34	$\bar{x}_{общ} = 3,55$
$\sum x_i$	17,9	18,6	16,7	$\sum \sum x_i = 53,2$
$\sum x_i^2$	64,19	69,28	55,83	$\sum \sum x_i^2 = 189,3$
$h = \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n_i}$	64,08	69,19	55,78	$\sum h = 189,05$ $H = \frac{\left(\sum \sum x_i\right)^2}{N} = \frac{53,2^2}{15} = 188,68$

Рассчитаем значения некоторых параметров дисперсионного комплекса для случайных моделей (табл. 15).

Таблица 15. Сводная таблица однофакторного дисперсионного анализа

Источник изменчивости	Сумма квадратов, *S*	Число степеней свободы, *df*	Средний квадрат, *ms*
Между градациями (факториальный)	$s_{мг} = \sum h - H =$ *189,05-188,68=0,37*	*r*-1=3-1=2	$ms_{мг} = \frac{S}{df_{мг}} = \frac{0,37}{2} = 0,185$
Внутри градаций (случайный)	$S_{сл} = \sum\sum x_i^2 - \sum h =$ *189,3-189,05=0,25*	*N-r*=15-3=12	$ms_{сл} = \frac{S_{сл}}{N-1} = \frac{0,25}{12} = 0,021$
Общий	$S_{общ} = \sum\sum x_i^2 - H =$ *189,3-188,68=0,62*	*N*-1=15-1=14	$F = \frac{ms_{мг}}{ms_{сл}} = \frac{0,185}{0,021} = 8,81$

В формулу расчёта критерия Фишера *F* входят оценки дисперсий, то есть параметров распределения признака, поэтому критерий *F* является параметрическим критерием.

Чем в большей степени вариативность признака обусловлена исследуемыми переменными (факторами) или их взаимодействием, тем выше эмпирические значения критерия *F*.

В дисперсионном анализе исследователь исходит из предположения, что одни переменные могут рассматриваться как причины, а другие - как следствия. Переменные первого рода считаются факторами, а переменные второго рода - результативными признаками.

Проведём сравнение фактического критерия с табличными значениями критерия *F* (Приложение 2) при данных степенях свободы: $df_1=2$, $df_2=12$

F_{st} *для* $\alpha < 0,05 – 3,89$; $\alpha < 0,01 – 6,93$; $\alpha < 0,001 – 12,97$

$F_ф=8,81 > F_{st}= 6,93$

Следовательно, выявлены достоверные различия в содержании жира в молоке (%) за 305 дней лактации у дочерей 3 разных быков.

В случае если установлены достоверные различия между градациями и модель дисперсионного комплекса случайная, то мы можем оценить силу влияния изучаемого фактора на результативный признак, рассчитав коэффициент внутриклассовой корреляции (r_w, табл. 16).

Таблица 16. Оценка силы влияния фактора – коэффициента внутриклассовой корреляции (r_w)

Источник изменчивости	Строение среднего квадрата	Факториальная варианса	Коэффициент внутриклассовой корреляции (r_w)
Между градациями	$ms_{мг} \approx \sigma^2_{мг} + n_o \cdot \sigma^2_{сл}$	$\sigma^2_{мг} = (ms_{мг} - ms_{сл})/n_o = (0{,}185 - 0{,}052)/5 = 0{,}027$	$r_{w(мг)} = \sigma^2_{мг}/(\sigma^2_{мг} + \sigma^2_{сл}) = 0{,}027/(0{,}027 + 0{,}052) = 0{,}342$
Случайный	$ms_{сл} \approx \sigma^2_{сл}$	$\sigma^2_{сл} = 0{,}052$	$r_{w(сл)} = \sigma^2_{сл}/(\sigma^2_{мг} + \sigma^2_{сл}) = 0{,}052/(0{,}027 + 0{,}052) = 0{,}658$

$n_o = (1/(r-1)) \times (N - \sum n_i^2/N) = (1/(3-1)) \times (15 - (25+25+25)/15) = ½ \times (15 - 5) = 5,$ (94)

где, n_0 - среднее количество вариант на градацию.

Таким образом, установлено, что влияние отцов на генетическое разнообразие % жира в молоке за 305 дней лактации дочерей составляет 34,2%, а 65,8% составляют различия случайные или любые другие неучтённые факторы.

Если модель дисперсионного комплекса фиксированная, то определить коэффициент внутриклассовой корреляции не представляется возможным, так как градации в таком комплексе не случайны, а фиксированы.

Достоверность внутриклассового коэффициента корреляции или достоверность отличия межгруппового среднего квадрата над случайным средним квадратом оценивается с помощью критерия Фишера, $F = \frac{ms_{мг}}{ms_{сл}}$, (95).

Если межгрупповой средний квадрат больше случайного среднего квадрата на величину большую первого табличного значения при данных степенях свободы (df_1-степень свободы при межгрупповом среднем квадрате, а df_2- при внутригрупповом среднем квадрате), то такой коэффициент внутриклассовой корреляции считается достоверным. В нашем примере $df_1=2$ и $df_2=12$. В таблице *приложения 2*

F_{st} *для* $\alpha < 0,05 – 3,89$; $\alpha < 0,01 – 6,93$; $\alpha < 0,001 – 12,97$

F_{st}=8,81 для $\alpha < 0,01$, следовательно $r_{w(мг)}=0,342$ *достоверен.*

Таким образом, по результатам однофакторного дисперсионного анализа установлено, что влияние генотипа быка-производителя на содержание жира в молоке дочерей составляет 34,2%.

Вопросы для самоконтроля

1. С какой целью применяется дисперсионный анализ?
2. В чем сущность дисперсионного анализа?
3. Как классифицируют дисперсионные комплексы?
4. Организация и анализ однофакторного дисперсионного комплекса для случайной модели.
5. Что показывает коэффициент внутриклассовой корреляции?

Вопросы для подготовки к промежуточному контролю

1. Цели и задачи статистических методов обработки экспериментальных данных.
2. Классификация признаков биологических объектов.
3. Совокупности. Выборочные и генеральная совокупности.
4. Биноминальное распределение. Распределение Пуассона, Гаусса (нормальное).
5. Первичная обработка данных выборочной совокупности. Объём совокупности, варианта. Ранжирование данных.
6. Вариационный ряд. Мода, медицина. Графическое изображение распределений. Полигон, гистограмма. Асимметрия. Эксцесс.
7. Среднее значение выборочной совокупности. Методы оценки среднего значения по данным, сгруппированным в вариационный ряд.
8. Средневзвешенное значение признака.
9. Оценка среднего значения методом сумм и методом условных отклонений.
10. Свойства среднего значения признака.
11. Разнообразие признака.
12. Оценка разнообразия в выборочных совокупностях. Прямой способ оценки разнообразия. Метод сумм. Метод условных отклонений.
13. Дисперсия, варианса, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.
14. Закономерности нормального распределения.
15. Нормированное отклонение. Вероятность встречаемости различных вариант в нормальном распределении.
16. Оценка параметров генеральной совокупности по параметрам выборочной совокупности.
17. Стандартная ошибка. Доверительные интервалы для математического ожидания и для среднего квадратического отклонения.

18. Сравнение двух выборочных совокупностей.
19. Достоверность различий средних двух выборочных совокупностей. Критерий Стьюдента.
20. Оценка связи между признаками.
21. Коэффициент корреляции - мера сопряжённой изменчивости признаков.
22. Корреляционная матрица - способ графического изображения силы связи между признаками и метод оценки коэффициента корреляции.
23. Доверительные интервалы коэффициента корреляции. Достоверность коэффициента корреляции.
24. Коэффициент регрессии.
25. Построение линии регрессии. Прямолинейная регрессия.
26. Сравнение ожидаемых и эмпирических распределений.
27. Метод χ^2, Смирнова-Колмогорова и другие методы непараметрической статистики.
28. Сравнение двух эмпирических распределений.
29. Построение и анализ 4-х, 6-ти, 9-ти, 12-ти польных таблиц.
30. Биноминальное распределение. Параметры биноминального распределения. Вероятность.
31. Признаки с альтернативной изменчивостью. Частоты, среднее квадратическое отклонение, стандартные ошибки.
32. Сравнение двух распределений признака с альтернативной изменчивостью.
33. Малые частоты. Преобразование Фишера. Метод Ван-дер-Вардена.
34. Анализ компонентов общего разнообразия: факториальное и случайное разнообразие.
35. Общие принципы дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный комплекс (фиксированная модель). Критерий достоверности.

36. Организация и анализ однофакторного дисперсионного комплекса для случайной модели. Коэффициент внутриклассовой корреляции. Критерий достоверности.
37. Двухфакторный дисперсионный комплекс (фиксированная модель). Оценка средних квадратов.
38. Двухфакторный дисперсионный комплекс. Сравнение средних. Определение достоверности.
39. Двухфакторный дисперсионный анализ (случайная модель) и его анализ.
40. Однофакторный анализ для качественных признаков.
41. Организация и анализ двухфакторного дисперсионного комплекса по признакам с альтернативной вариацией.
42. Организация и анализ иерархического дисперсионного комплекса.

РАЗДЕЛ 2. Использование языка статистического программирования R

2.1 Вычисление показателей описательной статистики

Создадим синтетическую выборку со следующими параметрами: $\bar{x}=0$; $\sigma=1$, $n=100$ и поместим ее в вектор «*x*»:

```
x<-rnorm(n=100,mean=0, sd=1)
```

Просмотрим содержимое вектора «*x*»:

```
x
##   [1] -0.558489885 -1.962618438  1.274602662  0.998310164 -1.844030746
##   [6]  1.316042354 -0.575573011 -0.394726532  2.071080164  0.065228105
##  [11]  1.021646960 -0.539721285 -1.268882351 -0.800723587 -1.199607096
##  [16] -0.527955915 -0.615784964  0.052204789  1.019198107 -0.033769324
##  [21] -0.597343911 -0.092345794  0.294744399  0.890312807 -0.749582793
##  [26]  0.542291954  0.297322965 -1.320325890 -0.104926401  1.246794757
##  [31] -1.347167316  2.245697422 -0.251862328 -0.082508448 -1.174997225
##  [36] -0.289955825 -0.974443258  0.626692036 -1.113955353 -0.280077864
##  [41] -0.634954148 -1.702779128 -2.129293105 -0.296976100  0.177276097
##  [46]  0.058285883 -0.695885116  0.624326348  2.082564409 -0.948200172
##  [51]  0.709745392  0.316136858  0.990323870 -1.144333054 -0.841480107
##  [56]  1.206560593 -1.006530203  0.513442791  0.485544081  0.854243728
##  [61] -0.729907069 -0.649211751 -0.484922756  1.106025235 -0.734149285
##  [66]  0.782766043 -0.790174128  0.480215636  0.851605754 -0.040477598
##  [71] -0.232954609 -0.461430887 -0.199213904 -0.645648778  0.604432385
##  [76]  1.131875171  0.423481840  0.524383457 -0.701789739  2.115865960
##  [81] -0.313960391 -0.707678693 -0.008717338 -1.849637164  0.623796086
##  [86] -0.309191242 -0.764172645 -0.740975637 -0.651590152  0.772421276
##  [91]  0.783213739 -0.901926746  0.008241436 -1.519840495  0.054265369
##  [96]  0.766560264 -1.556417599 -0.418677328 -1.285271733  1.718482298
```

Рассчитаем среднюю арифметическую:

```
mean(x)
## [1] -0.1007149
```

Рассчитаем значение стандартного отклонения:

```
sd(x)
## [1] 0.9611756
```

Создадим собственные функции для расчёта стандартного отклонения и коэффициента вариации:

```
se<-function(x) sd(x)/sqrt(sum(!is.na(x)))
cv<-function(x) paste(abs(round(sd(x)/mean(x),1)),"%",sep="")
```

Используя написанные функции установим уровни искомых статистических показателей (коэффициент вариации округлим до десятых):

```
se(x)
## [1] 0.09611756
cv(x)
## [1] "9.5%"
```

Создадим ещё один вектор со средним значением 10 и стандартным отклонением, равным 2:

```
y<-rnorm(n=100,mean=10, sd=2)
```

Создадим таблицу, объединив два ранее полученных вектора:

```
table<-data.frame(x,y)
```

Определим значения средних арифметических по каждому столбцу таблицы «table»:

```
apply(table,2,mean)
```

```
##          x          y 
## -0.1007149 10.0201844
```

Полученные результаты не округлены. Доработаем функцию:

```
apply(table,2,function(x) round(mean(x),3))
##      x      y 
## -0.101 10.020
```

Добавим новые возможности нашей функции, позволяющие в привычном виде получать значения средних арифметических и их ошибок по столбцам таблицы:

```
apply(table,2,function(x)
paste(round(mean(x),3),"±",round(se(x),4),sep=""))
##               x                y 
## "-0.101±0.0961"   "10.02±0.206"
```

Предусмотрим варианты, когда некоторые варианты отсутствуют в исходных выборках:

```
table[3,1]<-NA
table[7:8,2]<-NA
```

Доработаем функцию:

```
apply(table,2,function(x) sum(!is.na(x)))
##  x  y 
## 99 98
apply(table,2,function(x)
paste(round(mean(x),3),"±",round(se(x),4),sep=""))
##       x       y 
## "NA±NA" "NA±NA"
```

Полученные результаты указывают на неспособность функции *mean* по умолчанию обрабатывать выборки с пропущенными вариантами. Внесём некоторые коррективы:

```
apply(table,2,function(x)
paste(round(mean(na.omit(x)),3),"±",round(se(na.omit(x)),4),sep=""))
##                x                y
## "-0.115±0.0961"  "9.981±0.2061"
```

Представленный алгоритм решения поставленных задач можно использовать для простейшего статистического анализа данных в среде статистического программирования R.

2.2. Построение корреляционных решёток с оценкой коэффициентов корреляции

Введём функцию для создания корреляционных решёток, включающих значения коэффициентов корреляции, ошибок коэффициентов корреляции, показателя объёмов совокупностей при попарном исключении отсутствующих вариант и оценки уровней статистической значимости показателей связи.

```
corrsign<- function(x){
require(Hmisc)
  x <- as.matrix(x)
r_coeff<- rcorr(x,type=c("pearson"))$r #коэффициентыкорреляцииПирсона
p_lev<- rcorr(x, type=c("pearson"))$P  #уровни статистической значимости
  n <- rcorr(x, type=c("pearson"))$n   #n при попарном исключении
sr<-sqrt((1-r_coeff^2)/(n-2))   #стандартная ошибка для r
sr<- format(round(cbind(rep(-1.111, ncol(x)), sr), 3))[,-1]      #округлениеошибки
  stars <- ifelse(p_lev<= .001,"***", (ifelse (p_lev<= .01, "**",
        ifelse(p_lev<= .05, "*", ""))))
r_coeff<- format(round(cbind(rep(-1.111, ncol(x)),
        r_coeff), 3))[,-1] #округлениедля r
r_coeff_new<- ifelse (is.infinite(r_coeff),,
        matrix(paste(r_coeff,"±",sr,stars,"(",n,")", sep=""), ncol=ncol(x)))
diag(r_coeff_new) <- paste(diag(r_coeff),"", sep="-")
rownames(r_coeff_new) <- colnames(x)
colnames(r_coeff_new) <- paste(colnames(x),"", sep="")
r_coeff_new<- as.data.frame(r_coeff_new)
return(r_coeff_new) #На выходе - таблица корреляций с уровнями значимости
}
```

Пирсоновские корреляции по данным вида "*Setosa*" базы данных "*iris*"

```
a<-subset(iris,Species=="setosa")
corrsign(a[1:3])
```

Полученные результаты представлены в таблице:

```
Sepal.LengthSepal.WidthPetal.Length
Sepal.Length               1.000-  0.743± 0.097***(50)  0.267± 0.139(50)
Sepal.Width   0.743± 0.097***(50)               1.000-  0.178± 0.142(50)
Petal.Length     0.267± 0.139(50)     0.178± 0.142(50)            1.000-
```

Пирсоновские корреляции по данным вида "*Versicolor*" базы данных "*iris*" можно рассчитать следующим способом:

```
a<-subset(iris,Species=="versicolor")
corrsign(a[1:3])
```

```
Sepal.LengthSepal.WidthPetal.Length
Sepal.Length               1.000-  0.526± 0.123***(50)  0.754± 0.095***(50)
Sepal.Width   0.526± 0.123***(50)               1.000-  0.561± 0.120***(50)
Petal.Length  0.754± 0.095***(50)  0.561± 0.120***(50)               1.000-
```

Пирсоновские корреляции по данным вида "*Versicolor*" базы данных "*iris*" вместе со своими ошибками находим подменой имени градации фактора «*Species*»:

```
a<-subset(iris,Species=="virginica")
corrsign(a[1:3])
```

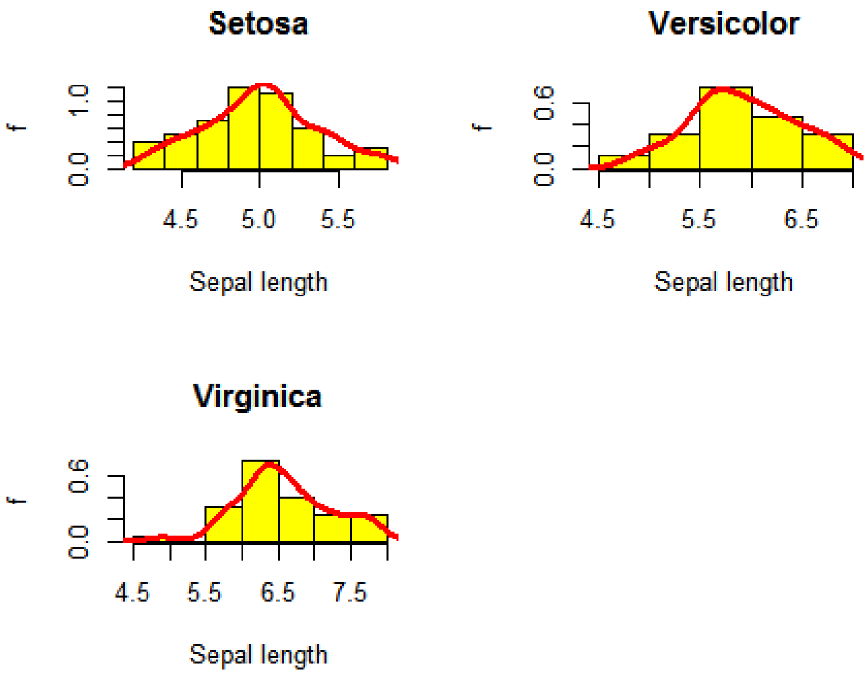
Корреляционная решетка имела вид:

```
Sepal.LengthSepal.WidthPetal.Length
Sepal.Length               1.000-  0.457± 0.128***(50)  0.864± 0.073***(50)
Sepal.Width   0.457± 0.128***(50)               1.000-   0.401± 0.132**(50)
Petal.Length  0.864± 0.073***(50)   0.401± 0.132**(50)               1.000-
```

2.3. Визуализация исходных данных

Создаём гистограммы с помощью библиотек, включенных по умолчанию в дистрибутив R.

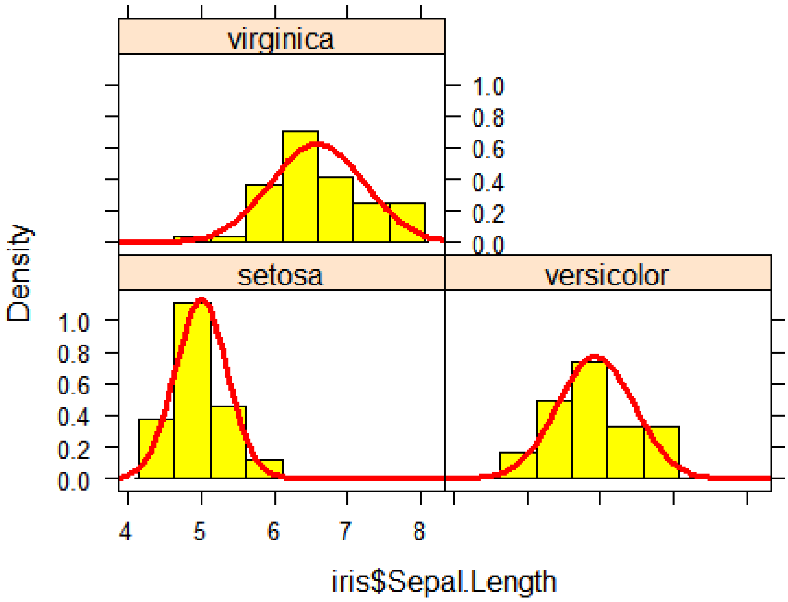
```
#png(file="sl_hist.png", bg = "white") #Если нужно сохранить рисунок, то убираем хештег
src1<-iris$Sepal.Length[iris$Species == "setosa"]
src2<-iris$Sepal.Length[iris$Species == "versicolor"]
src3<-iris$Sepal.Length[iris$Species == "virginica"]

#2 столбца и 2 строки для наших гистограмм. Добавление диаграмм "сверху-вниз"
#par(mfcol=c(2,2))
#Один из способов объединения нескольких рисунков на одном поле (не работает с библиотекой knitr)

#Альтернативный способ размещения рисунков
layout(matrix(c(1,2,3,0), 2, 2, byrow =TRUE))
hist(src1,xlab="Sepal length", ylab="f", probability=T, col="yellow", main=paste("Setosa"))
lines(density(src1),col="red",lwd=3)
hist(src2,xlab="Sepal length", ylab="f", probability=T, col="yellow", main=paste("Versicolor"))
lines(density(src2),col="red",lwd=3)
hist(src3,xlab="Sepal length", ylab="f", probability=T, col="yellow", main=paste("Virginica"))
lines(density(src3),col="red",lwd=3)
```



Применяем *dev.off()*, если нужно сохранить рисунок, то убираем хештег. Окончание процедуры сохранения.

Используем альтернативную библиотеку "*lattice*" для визуализации вариационных рядов:

```
library(lattice)
#png(file="sl_hist_lattice.png", bg = "white") #this is necessary to save data
histogram(~iris$Sepal.Length |Species, data=iris, type="density", col="yellow",
panel = function(x, ...){
panel.histogram(x, ...)
panel.mathdensity(dmath =dnorm, col ="red",lwd=3,
args =list(mean=mean(x),sd=sd(x)))})
```

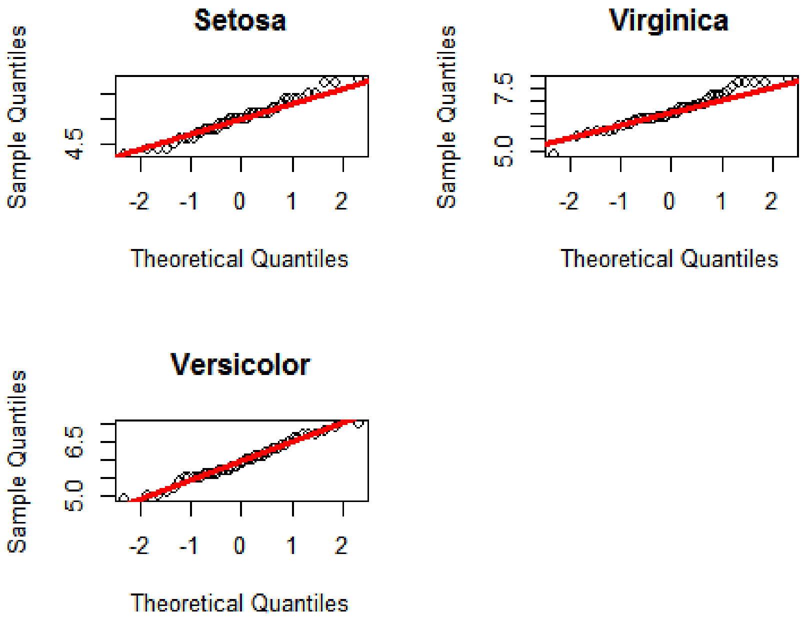



```
#dev.off() #Сохранение диаграмм.
```

Строим диаграммы "квантиль-квантиль"

```
#2 столбца и 2 строки для наших гистограмм. Добавление диаграмм "сверху-вниз"
par(mfcol=c(2,2))
qqnorm(src1, main="Setosa")
qqline(src1,col="red",lwd=3)
qqnorm(src2, main="Versicolor")
qqline(src2,col="red",lwd=3)
qqnorm(src3, main="Virginica")
qqline(src3,col="red",lwd=3)
#dev.off() #Если нужно сохранить рисунок, то убираем хештег. Окончание процедуры сохранения.
```

Полученные результаты свидетельствовали о нормальном распределении исходных данных.


Setosa
Sample Quantiles
4.5
-2 -1 0 1 2
Theoretical Quantiles
Virginica
Sample Quantiles
5.0 7.5
-2 -1 0 1 2
Theoretical Quantiles
Versicolor
Sample Quantiles
5.0 6.5
-2 -1 0 1 2
Theoretical Quantiles

2.4. Пользовательские функции для вычисления статистических показателей

Создадим функцию для вычисления показателей описательной статистики на языке статистического программирования R с именем «descrstats». В качестве ключевой особенности рассмотрим возможность выбора статистических показателей для включения в выходную таблицу. Функция позволяет учитывать несколько факторов в качестве группирующих признаков. Результаты обработки представлены классом “таблица” (data.frame).

Использование:

descrstats <- function(x, grx, nmin = 3, Mean = TRUE, SE = TRUE, Mean_ng = TRUE, SE_ng = TRUE, Me = TRUE, Min = TRUE, Max = TRUE, Range = TRUE, As = FALSE, Ex = FALSE, Q1 = TRUE, Q3 = TRUE, IQR = TRUE, SD = TRUE, Cv = TRUE, AD = FALSE, SF = FALSE, srclevs = FALSE)

Аргументы:

x – исходные данные (зависимые признаки с непрерывным характером распределений).

grx – группирующие признаки. *nmin* минимальное количество вариант в градации фактора (по умолчанию *nmin* = 3). …

AD – критерий Андерсона-Дарлинга. При *AD* = *TRUE* в таблицу включается результат соответствующего тестирования и оценка уровня статистической значимости.

SF – критерий Шапиро-Франциа. При *SF* = *TRUE* в таблицу включается результат соответствующего тестирования и оценка уровня статистической значимости.

Текст функции:

```r
#Функция усечения количества вариант в градации фактора n >= ingroup
n_group_restricted<- function(c,ingroup) #c - таблица, где 1 столбец -
зависимый признак,
#2-й столбец - группирующий признак;
#ingroup - минимальное количество вариант в градации
{local({
#b - фактор с урезанным кол-вом строк "NA"
#c - фактор без урез.строк "NA", ingroup - количество вариант в градации
names(c) <- c("depvar","factor")
#Урезаем базу с фактором и зависимым признаком методом попарного удаления "NA"
b <- as.data.frame(na.omit(c))
  groups <- data.frame(table(b$factor)) #Определяем "n"
ипереводимтаблицувобьект "data.frame"
names(groups) <- c("id","n")   #Переименовываем созданную таблицу - "id","n"
groups<- subset(groups, n >= ingroup, select = c(id,n))  #Выбираем только
группы, в которых не менее ingroup вариант
ifgroups<- c$factor %in% groups$id#Создаемновыйвектор "ifgroups", где TRUE >=
ingroup и FALSE < ingroup
lgroups<- as.data.frame(subset(c, ifgroups == "TRUE"))
return(lgroups)   #Возвращаем таблицу с нужной величиной градации
})}

# Источник: Hozo, S.P. Estimating the mean and variance from the median, range,
and the size of a sample
# / B. Djulbegovic& I. Hozo // BMC Medical Research Methodology. – 2005. – Vol.
5, – nr 1. – P. 13.
mean.sx2 <- function(x)
{
  a <- min(x)
  b <- max(x)
  m <- median(x)
  n <- sum(!is.na(x))
mn<- (a+2*m+b)/4+(a-2*m+b)/(4*n)
  s <- sqrt((a^2+m^2+b^2+(n-3)*((a+m)^2+(m+b)^2)/8-n*mn^2)/(n-1))
sx<- s/sqrt(sum(!is.na(x)))
```

```
c(mn,sx)
}

#Автоматическое округление в зависимости от исходных данных
round_auto<- function(x){
ifelse(x <1, x <- round(x, 3),
ifelse(nchar(trunc(x)) >= 4, x <- round(x),
ifelse(nchar(trunc(x)) <2, x <- round(x, 2), x <- round(x, 1))
)
  )
return(x)  #На выходе - округлённое значение
}

se <- function(x)
{
  n <- sum(!is.na(x))
se_output<- sd(na.omit(x))/sqrt(n)
return(se_output)
}

library(nortest)
#Here Mean_ng, SE_ng mean nongaussian distribution
descrstats2 <- function(x, grx, nmin = 3, Mean = TRUE, SE = TRUE, Mean_ng =
TRUE, SE_ng = TRUE, Me = TRUE, Min = TRUE, Max = TRUE,
                        Range = TRUE, As = FALSE, Ex = FALSE, Q1 = TRUE, Q3 =
TRUE, IQR = TRUE, SD = TRUE,
Cv = TRUE, AD = FALSE, SF = FALSE, srclevs = FALSE)
{
descrtable<-function(x = x, grx = grx, nmin = nmin, Mean_ = Mean, SE_ = SE,
Mean_ng_ = Mean_ng, SE_ng_ = SE_ng, Me_ = Me,
                       Min_ = Min, Max_ = Max, Range_ = Range, As_ = As, Ex_ =
Ex, Q1_ = Q1, Q3_ = Q3, IQR_ = IQR, SD_ = SD,
Cv_ = Cv, AD_ = AD, SF_ = SF, srclevs = srclevs)
  {
```

```
grx<- as.data.frame(interaction(grx, sep = ":"))
xname<- names(x)
nminame<- names(grx)
    x <- as.data.frame(x)
x <- cbind(x,grx)
#Удаляем строки, где количество вариант меньше определенного grf минимума
#x - таблица: зав.пр, групп.пр; кол-во вариант в группе - nmin
x <- n_group_restricted(x, nmin)
    names(x) <- c("x","grx")
    x <- na.omit(x)
    res <- round_auto(as.data.frame(tapply(x$x, x$grx, FUN=function(y) sum(!
is.na(y)))))
    names(res) <- "n"
#res$naa<-apply(res$n,1,is.na)
if(Mean_) {res$Mean<- tapply(x$x, x$grx, FUN = function(y) round_auto(mean(y,
na.rm=TRUE)))}
if(SE_) {res$SE<- tapply(x$x, x$grx, FUN=function(y) round_auto(se(y)))}

if(Mean_ng_) {res$Mean_ng<- tapply(x$x, x$grx, FUN = function(y)
round_auto(mean.sx2(y)[1]))}
if(SE_ng_) {res$SE_ng<- tapply(x$x, x$grx, FUN = function(y)
round_auto(mean.sx2(y)[2]))}

if(Me_) {res$Me<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(median(y)))}
if(Min_) {res$Min<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(min(y)))}
if(Max_) {res$Max<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(max(y)))}
if(Range_) {res$Range<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(max(y)-
min(y)))}
if(As_) {res$As<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(skewness(y)))}
if(Ex_) {res$Ex<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(kurtosis(y)))}
if(Q1_) {res$Q1<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(quantile(y,
probs=.25,na.rm = TRUE, type = 8)))}
if(Q3_) {res$Q3<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(quantile(y,
probs=.75,na.rm = TRUE, type = 8)))}
if(IQR_) {res$IQR<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y)
```

```
round_auto(quantile(y, probs=.75,na.rm = TRUE, type = 8)-quantile(y,
probs=.25,na.rm = TRUE, type = 8)))}
if(SD_) {res$SD<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round_auto(sd(y)))}
if(Cv_) {res$Cv<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y) round((sd(y)*100/mean(y)),
1))}
if(AD_) {res$AD<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y)
ifelse(is.na(sum(!is.na(y))),NA, ifelse(sum(!is.na(y))>7, round(ad.test(y)
$statistic,3),NA)))
res$AD.p<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y)
ifelse(is.na(sum(!is.na(y))),NA, ifelse(sum(!is.na(y))>7, round(ad.test(y)
$p,3),NA)))}
if(SF_) {res$SF<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y)
ifelse(is.na(sum(!is.na(y))),NA, ifelse(sum(!is.na(y))>7, round(sf.test(y)
$statistic,3),NA)))
res$SF.p<-tapply(x$x,x$grx,FUN=function(y)
ifelse(is.na(sum(!is.na(y))),NA, ifelse(sum(!is.na(y))>7, round(sf.test(y)
$p,3),NA)))}
    res<-cbind(Group=row.names(res),res)
rn<-paste(xname,1:nrow(res),sep="_")
#  row.names(res)<-rn
    Index<-rep(xname,nrow(res))
res<-data.frame(Index,res)#Добавляем стобец с повторяющимися названиями строк
res<-subset(res,is.na(res$n)==FALSE)
    names(res)<-c("Index",names(res[2:ncol(res)]))
row.names(res)<-NULL
return(res)
  }
if(ncol(x)!=1){
    res<-descrtable(x[1],grx,nmin)
for(iin2:ncol(x))
    {
      res2<-descrtable(x[i],grx,nmin)
      res<-rbind(res,res2)
    }
return(res)
```

```
}
}
```

Пример использования

```
iris$factor<- gl(3, 1, 150)
```

```
descrstats2(iris[1:4], list(iris[,5], iris[,6]), Mean_ng = FALSE, SE_ng =
FALSE, Q1 = FALSE, Q3 = FALSE, Me = FALSE)
##             Index        Group  n  Mean    SE Min Max Range   IQR    SD   Cv
## 1  Sepal.Length     setosa:1 17 5.050 0.095 4.4 5.7   1.3 0.567 0.391  7.7
## 2  Sepal.Length versicolor:1 17 5.770 0.131 4.9 6.6   1.7 0.833 0.538  9.3
## 3  Sepal.Length  virginica:1 16 6.760 0.147 5.8 7.7   1.9 0.817 0.588  8.7
## 4  Sepal.Length     setosa:2 17 5.010 0.067 4.3 5.4   1.1 0.233 0.276  5.5
## 5  Sepal.Length versicolor:2 16 6.020 0.105 5.6 6.9   1.3 0.458 0.418  6.9
## 6  Sepal.Length  virginica:2 17 6.450 0.164 4.9 7.7   2.8 0.667 0.676 10.5
## 7  Sepal.Length     setosa:3 16 4.950 0.099 4.4 5.8   1.4 0.517 0.395  8.0
## 8  Sepal.Length versicolor:3 17 6.020 0.137 5.1 7.0   1.9 1.000 0.564  9.4
## 9  Sepal.Length  virginica:3 17 6.570 0.155 5.7 7.9   2.2 0.867 0.639  9.7
## 10  Sepal.Width     setosa:1 17 3.470 0.097 3.0 4.4   1.4 0.600 0.400 11.5
## 11  Sepal.Width versicolor:1 17 2.680 0.080 2.0 3.2   1.2 0.533 0.329 12.3
## 12  Sepal.Width  virginica:1 16 2.980 0.074 2.5 3.8   1.3 0.258 0.297 10.0
## 13  Sepal.Width     setosa:2 17 3.450 0.070 3.0 3.9   0.9 0.400 0.290  8.4
## 14  Sepal.Width versicolor:2 16 2.910 0.052 2.6 3.4   0.8 0.258 0.208  7.2
## 15  Sepal.Width  virginica:2 17 3.020 0.075 2.5 3.6   1.1 0.500 0.309 10.2
## 16  Sepal.Width     setosa:3 16 3.360 0.112 2.3 4.1   1.8 0.475 0.450 13.4
## 17  Sepal.Width versicolor:3 17 2.740 0.085 2.2 3.3   1.1 0.567 0.352 12.9
## 18  Sepal.Width  virginica:3 17 2.920 0.089 2.2 3.8   1.6 0.467 0.366 12.5
## 19 Petal.Length     setosa:1 17 1.490 0.035 1.3 1.9   0.6 0.100 0.145  9.8
## 20 Petal.Length versicolor:1 17 4.200 0.119 3.3 4.9   1.6 0.667 0.490 11.7
## 21 Petal.Length  virginica:1 16 5.570 0.147 4.8 6.7   1.9 0.758 0.586 10.5
## 22 Petal.Length     setosa:2 17 1.410 0.040 1.0 1.6   0.6 0.133 0.165 11.7
## 23 Petal.Length versicolor:2 16 4.330 0.105 3.5 4.9   1.4 0.558 0.421  9.7
## 24 Petal.Length  virginica:2 17 5.490 0.138 4.5 6.9   2.4 0.700 0.569 10.4
## 25 Petal.Length     setosa:3 16 1.490 0.052 1.2 1.9   0.7 0.358 0.206 13.9
## 26 Petal.Length versicolor:3 17 4.250 0.124 3.0 5.1   2.1 0.700 0.511 12.0
## 27 Petal.Length  virginica:3 17 5.600 0.128 5.0 6.7   1.7 0.833 0.529  9.4
```

```
## 28  Petal.Width     setosa:1 17 0.229 0.021 0.1 0.4   0.3 0.100 0.085 37.0
## 29  Petal.Width versicolor:1 17 1.290 0.050 1.0 1.5   0.5 0.433 0.205 15.8
## 30  Petal.Width  virginica:1 16 2.070 0.066 1.6 2.5   0.9 0.500 0.263 12.7
## 31  Petal.Width     setosa:2 17 0.247 0.030 0.1 0.6   0.5 0.100 0.123 49.8
## 32  Petal.Width versicolor:2 16 1.340 0.051 1.0 1.8   0.8 0.217 0.203 15.2
## 33  Petal.Width  virginica:2 17 2.090 0.071 1.5 2.5   1.0 0.433 0.291 13.9
## 34  Petal.Width     setosa:3 16 0.262 0.027 0.1 0.5   0.4 0.158 0.109 41.4
## 35  Petal.Width versicolor:3 17 1.350 0.047 1.0 1.7   0.7 0.300 0.194 14.4
## 36  Petal.Width  virginica:3 17 1.920 0.062 1.4 2.4   1.0 0.233 0.254 13.2
```

2.5. Пользовательская функция для вычисления корреляционные матрицы

Пример функции, позволяющей создавать корреляционные матрицы и оценивать уровни статистической значимости коэффициентов корреляции. Предусмотрено вычисление объёма совокупности при попарном исключении вариант.

```
corrsign<-function(x){
```

```
require(Hmisc)

x<-as.matrix(x)

r_coeff<-rcorr(x,type=c("pearson"))$r#коэффициентыкорреляцииПирсона

p_lev<-rcorr(x, type=c("pearson"))$P#уровни статистической значимости

n<-rcorr(x, type=c("pearson"))$n#n при попарном исключении

sr<-sqrt((1-r_coeff^2)/(n-2))#стандартная ошибка для r

sr<-format(round(cbind(rep(-1.111, ncol(x)), sr), 3))[,-1]#округлениеошибки

stars<-ifelse(p_lev<=.001,"***", (ifelse(p_lev<=.01, "**",

ifelse(p_lev<=.05, "*", ""))))

r_coeff<-format(round(cbind(rep(-1.111, ncol(x)), r_coeff), 3))[,-
1]#округлениедля r

r_coeff_new<-ifelse(is.infinite(r_coeff),,

matrix(paste(r_coeff,"±",sr,stars,"(",n,")", sep=""), ncol=ncol(x)))

diag(r_coeff_new)<-paste(diag(r_coeff),"", sep="-")

rownames(r_coeff_new)<-colnames(x)

colnames(r_coeff_new)<-paste(colnames(x),"", sep="")

r_coeff_new<-as.data.frame(r_coeff_new)

return(r_coeff_new)#На выходе - таблица корреляций с уровнями значимости

}
```

```
#Пирсоновские корреляции по данным вида "Setosa" базы данных "iris"
a<-subset(iris,Species=="setosa")
corrsign(a[1:3])
```

```
## Loading required package: Hmisc
## Loading required package: grid
## Loading required package: lattice
## Loading required package: survival
## Loading required package: Formula
## Loading required package: ggplot2
##
## Attaching package: 'Hmisc'
## ## Следующие объекты скрыты от 'package:base':
##
##     format.pval, round.POSIXt, trunc.POSIXt, units
##                      Sepal.LengthSepal.WidthPetal.Length
## Sepal.Length               1.000-   0.743± 0.097***(50)  0.267± 0.139(50)
## Sepal.Width   0.743± 0.097***(50)              1.000-   0.178± 0.142(50)
## Petal.Length     0.267± 0.139(50)     0.178± 0.142(50)            1.000-
```

```
#Пирсоновские корреляции по данным вида "Versicolor" базы данных "iris"
a<-subset(iris,Species=="versicolor")
corrsign(a[1:3])
```

```
##                      Sepal.LengthSepal.WidthPetal.Length
## Sepal.Length               1.000-   0.526± 0.123***(50)  0.754± 0.095***(50)
## Sepal.Width   0.526± 0.123***(50)              1.000-   0.561± 0.120***(50)
## Petal.Length  0.754± 0.095***(50)  0.561± 0.120***(50)               1.000-
```

```
#Пирсоновские корреляции по данным вида "Versicolor" базы данных "iris"
```

```r
a<-subset(iris,Species=="virginica")
corrsign(a[1:3])
```

```
##                       Sepal.LengthSepal.WidthPetal.Length
## Sepal.Length               1.000-   0.457± 0.128***(50)  0.864± 0.073***(50)
## Sepal.Width   0.457± 0.128***(50)               1.000-   0.401± 0.132**(50)
## Petal.Length  0.864± 0.073***(50)   0.401± 0.132**(50)              1.000-
```

2.6. Пользовательская функция для автоматического округления в зависимости от исходных данных

```
#x<-3.3384762
round_auto<-function(x){
ifelse(x<1,x<-round(x,3),
ifelse(nchar(trunc(x))>=4,x<-round(x),
ifelse(nchar(trunc(x))<2,x<-round(x,2),x<-round(x,1))
)
)
return(x)#На выходе - округлённое значение
}
round_auto(.1234567)
## [1] 0.123
round_auto(1.234567)
## [1] 1.23
```

РАЗДЕЛ 3. Содержание и организация самостоятельной работы

Самостоятельная работа студентов рассматривается как одна из форм обучения, которая предусмотрена федеральным государственным образовательным стандартом и учебными планами по направлениям подготовки. Целью самостоятельной (внеаудиторной) работы студентов является обучение навыкам работы с учебной и научной литературой и практическими материалами, необходимыми для изучения курса статистических дисциплины и развития у них способностей к самостоятельному анализу полученной информации.

В процессе изучения дисциплины студент может выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- подготовка к выполнению контрольных работ по разделам: «Группировка данных. Показатели описательной статистики», «Методы сравнения» «Оценка связи между признаками»;
- подготовка к устному опросу по разделам: «Методы обработки качественных признаков», «Оценка связи между признаками», «Дисперсионный анализ»;
- подготовка к зачёту или экзамену.

Темы самостоятельной работы

1. Подготовка к опросу по темам: «Статистические методы в биологии как раздел математики» «Первичная обработка данных выборочной совокупности», «Среднее значение выборочной совокупности», «Разнообразие признака», «Закономерности нормального распределения».
2. Подготовка к опросу по темам: «Оценка параметров генеральной совокупности по параметрам выборочной совокупности», «Сравнение двух выборочных совокупностей для количественных и качественных признаков», «Сравнение ожидаемых и эмпирических распределений и двух эмпирических распределений (Методы: Колмогорова-Смирнова, хи-квадрат, Манна-Уитни)».

3. Подготовка к опросу по темам: «Оценка связи между признаками. Коэффициент регрессии».
4. Подготовка к опросу по темам: «Биноминальное распределение. Признаки с альтернативной изменчивостью».
5. Подготовка к опросу по темам: «Анализ компонентов общего разнообразия: факториальное и случайное разнообразие», «Двухфакторный дисперсионный анализ (фиксированная модель и случайная модель)», «Однофакторный и двухфакторный анализ для качественных признаков. Иерархический дисперсионный комплекс».

РАЗДЕЛ 4. Методические указания и задания для выполнения контрольных работ

Правила оформления контрольной работы:

- сформулированный вопрос необходимо без сокращения переписать на лист ответа;
- ответ на теоретический вопрос следует излагать ясно и коротко, при использовании статистических показателей желательно использовать их общепринятые обозначения;
- расчет статистических показателей следует сопровождать написанием формул, по которым они определяются;
- при характеристике статистической значимости вычисляемых показателей следует пользоваться гипотезами H_O и H_1;
- выполнения расчётную часть контрольной работы не следует переписывать на лист ответа все исходные данные, указав только номер контрольного задания.

4.1. Задания для выполнения контрольных работ

Контрольная работа №1

Коэффициент корреляции для признаков с альтернативной изменчивостью

Задание 1

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости лейкозом коров-матерей и дочерей:

	Матери (x)	
Дочери (y)	больные	здоровые
Больные	130	50
Здоровые	40	160

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 2

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости лейкозом коров-матерей и дочерей:

	Матери (x)	
Дочери (y)	больные	здоровые
Больные	143	57
Здоровые	112	293

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 3

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости лейкозом коров-матерей и дочерей:

	Матери (x)	
Дочери (y)	больные	здоровые
Больные	146	70
Здоровые	114	391

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 4

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости туберкулезом коров-матерей и дочерей:

	Матери (x)	
Дочери (y)	больные	здоровые
Больные	50	20
Здоровые	10	40

2.Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 5

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости туберкулезом коров-матерей и дочерей:

	Матери (x)	
Дочери (y)	больные	здоровые
Больные	145	73
Здоровые	73	381

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 6

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости туберкулезом коров-матерей и дочерей:

	Матери (x)	
Дочери (y)	больные	здоровые
Больные	139	64
Здоровые	71	386

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 7

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости туберкулезом коров-матерей и дочерей:

	Матери (x)	
Дочери (y)	больные	здоровые
Больные	80	39
Здоровые	30	207

2.Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 8

1. Проводили экспериментальные скрещивания кур нескольких пород. Определить по соотношению окраски пуха у цыплят, происходило ли сцепленное с полом наследование “сигнальной окраски”. В опыте было получено 100 помесных цыплят, которые распределились в клетках корреляционной решетки следующим образом:

	Тип пигментации (x)	
Пол цыплят (у)	светлые	полосатые
Петушки	45	5
Курочки	3	47

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 9

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости туберкулезом коров-матерей и их внучек:

	Матери (x)	
Внучки (у)	больные	здоровые
Больные	77	18
Здоровые	24	201

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 10

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости туберкулезом коров-матерей и их внучек:

	Матери (x)	
Внучки (у)	больные	здоровые
Больные	35	5
Здоровые	15	40

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 11

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости маститом коров-матерей и дочерей:

	Дочери (х)	
Матери (у)	больные	здоровые
Больные	129	27
Здоровые	16	385

2.Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 12

1. Определить коэффициент корреляции между частотой заболеваемости маститом коров-матерей и дочерей:

	Матери (х)	
Дочери (у)	больные	здоровые
Здоровые	15	70
Больные	45	25

2.Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 12

1. Определить коэффициент корреляции между резистентностью цыплят к пуллорозу и степенью отселекционированности стада по этому показателю:

	После заражения живой культурой (х)	
Группа птицы (у)	выжило	пало
Исходная	115	105
Отселекционированная	560	58

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 13

1. Определить коэффициент корреляции между резистентностью цыплят к пуллорозу и степенью отселекционированности стада по этому показателю:

Группа птицы (y)	После заражения живой культурой (х)	
	выжило	пало
Исходная	135	100
Отселекционированная	580	60

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 14

1. Определить коэффициент корреляции между резистентностью цыплят к пуллорозу и степенью отселекционированности стада по этому показателю:

Группа птицы (y)	После заражения живой культурой (х)	
	выжило	пало
Исходная	25	100
Отселекционированная	100	5

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 15

1. Определить коэффициент корреляции между окраской пуха и полом у цыплят:

Пол цыплят (y)	Тип пигментации (х)	
	светлые	полосатые
Петушки	102	48
Курочки	33	117

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Задание 16

1. Определить коэффициент корреляции между окраской пуха и полом у цыплят:

Пол цыплят (y)	Тип пигментации (х)	
	светлые	полосатые
Петушки	102	48
Курочки	40	120

2. Определить достоверность коэффициента корреляции?

Контрольная работа №2

Параметрическая статистика

Задание 1

1. Назовите свойства средней арифметической.
2. Исследовали содержание молочного жира коров черно-пестрой породы (кг) за I и II лактации:

I лактация

141 124 142 197 178 135 193 147 157 171 165 198 200 201 190 156 183 151 147 204 120 197 150 143 171 175 144 133 208 161 210 139 175 149 128 154 119 188 213 171 200 135 170 124 169 192 156 206

II лактация

208 149 241 219 177 187 173 158 142 220 179 220 214 199 225 155 136 201 197 180 191 176 146 209 197 174 163 165 139 189 272 204 178 161 180 158 194 193 251 258 219 154 159 222 180 142 183 209

Оцените, имеются ли достоверные различия по содержанию молочного жира у коров за I и II лактации.

Задание 2

1. Что такое S (дисперсия)? Какие формулы для расчета дисперсии вы знаете?
2. По данным живой массы (кг) свиноматок кемеровской породы по третьему опоросу составьте вариационный ряд и изобразите его графически.

261 235 251 230 280 260 240 242 260 230 277 265 247 223 222 240 260
232 237 230 250 260 228 220 236 240 241 279 242 228 265 259 274 235
240 219 228 242 275 228 219 245 265 240 243 278 244 251 230 227 252

Задание 3

1. Что такое мода и медиана?
2. Исследовали содержание жира (%) в молоке коров из двух ферм:

1 ферма 3,7 4,1 3,9 3,7 4,3 3,6 3,5 3,8 3,7 3,8 4,1 3,9 3,8 3,6

2 ферма 3,9 3,7 3,8 4,1 3,6 3,9 3,7 3,7 3,9 3,8 3,9 4,0 3,5 3,6

Установите, имеются ли достоверные различия по содержанию жира в молоке у коров из 2-х ферм.

Задание 4

1. Что означают выражения: $\bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$; $\bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$; $\bar{x}_3 \pm s_{\bar{x}_3}$?
2. Определите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ, σ^2 и доверительные интервалы для генеральной совокупности по данным следующей выборки суточного прироста, г:

691 587 722 812 573 570 700

660 520 640 650 750 630 650

Задание 5

1. Что такое многовершинность и о чем она свидетельствует?
2. По данным выборки составьте вариационный ряд и изобразите его графически:

Выборка коров швицкой породы по живой массе, кг.

497 530 500 545 458 505 503 518 552 550 479 487 491 557 545 470 509

515 529 469 493 527 530 490 541 556 510 547 529 538 475 483 472 520

539 507 512 465 527 515 524 480 531 462 517 495 501 510 537 521 470

Задание 6

1. Что означают выражения: $\bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$; $\bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$; $\bar{x}_3 \pm s_{\bar{x}_3}$?

2. Исследовали содержание белка (%) в молоке у дочерей и матерей коров черно-пестрой породы:

Дочери 3,1 3,3 3,0 3,2 3,1 3,4 3,2 3,3 3,4 3,2 3,1 3,0 3,4

Матери 3,1 3,4 3,0 3,3 3,2 3,0 3,1 3,4 3,4 3,1 3,2 3,1 3,2

Определите: имеются ли достоверные различия по содержанию белка в молоке между матерями и дочерями.

Задание 7

1. Что такое σ^2 и что она характеризует?
2. Определите достоверность разности между настригом шерсти (кг) у овец в связи с различным типом гемоглобина и вычислите общую $\sigma^2_{\text{общ.}}$ и $\bar{x}_{\text{общ.}}$ по трем выборкам:

	I	II	III
Тип гемоглобина	A	AB	B
	n_1=14	n_2=125	n_3=268
	$\bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$=5,39±0,19	$\bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$=5,69±0,06	$\bar{x}_3 \pm s_{\bar{x}_3}$=5,45±0,04
	σ_1 = 0,71 кг	σ_2 = 0,67 кг	σ_3 =0,65 кг

Задание 8

1. Что такое выборочная совокупность? Перечислите параметры, характеризующие выборочную совокупность.
2. Известна активность ферментов крови в среднем за лактацию ($\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$) у коров трех выборок:

	I		II		III	
Амилаза, %	n_1=100	2,8±0,35	n_2= 120	13,7±0,35	n_3=48	10,37±0,47
	σ_1= 0,18		σ_2=0,20		σ_3 = 0,20	

Какова достоверность различий в активности фермента амилазы между сравниваемыми группами? Определить $\sigma^2_{общ.}$ и $\bar{x}_{общ.}$ по трем выборкам.

Задание 9

1. Напишите, какой процент вариант находится в пределах $\bar{x}$±1σ;$\bar{x}$±2σ;$\bar{x}$±3σ:
2. Вычислите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ, σ^2 по данным вариационного ряда для настрига шерсти овец (кг):

x_i	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5
f	4	8	52	74	116	171	249	154	96	52	28	2

Постройте вариационную кривую по данным настрига шерсти овец.

Задание 10

1. Что такое полигон распределения?
2. Определите достоверность разности между настригом шерсти (кг) у овец с различным типом гемоглобина и вычислите общую $\sigma^2_{общ.}$ и $\bar{x}_{общ.}$ по трем выборкам:

	I	II	III
Тип гемоглобина	A	AB	B
	n_1=20	n_2=50	n_3=80
	$\bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$=3,10±0,09	$\bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$=2,96±0,06	$\bar{x}_3 \pm s_{\bar{x}_3}$=3,04±0,02
	σ_1 = 0,40 кг	σ_2 = 0,42 кг	σ_3 =0,18 кг

Задание 11

1. Что такое асимметрия и что может означать асимметричность?
2. По данным о малой длине (мм) сеголетков карпа составьте вариационный ряд и изобразите его графически:

76 78 75 70 68 80 68 77 80 78 75 80 78 79 80 80 72 75 77 65 84 78 73 80 79 79 73 75 73 70 75 72 74 76 80 75 74 77 77 63 69 75 80 69 71 72 67

Задание 12

1. Напишите, какой процент вариант находится в пределах $\bar{x}\pm1\sigma$;$\bar{x}\pm2\sigma$;$\bar{x}\pm3\sigma$:
2. Вычислите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ, σ^2 доверительные границы генеральной совокупности по данным вариационного ряда яйценоскости кур (шт.):

Классы (x_i)	100	120	140	160	180	200	220	240	200
Частоты (f)	44	66	131	165	256	152	108	59	21

Задание 13

1. Ошибка средней арифметической. В результате чего она возникает и что это такое?
2. По данным плодовитости свиноматок постройте вариационную кривую. Определите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ σ, σ^2 для плодовитости свиноматок:

Число поросят у свиноматок (x_i)	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	1	2	8	8	19	27	15	4	1

Задание 14

1. Что такое генеральная совокупность? Параметры, характеризующие генеральную совокупность.

2. Вычислите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ, σ^2 доверительные границы генеральной совокупности по данным вариационного ряда яйценоскости кур (шт.):

Классы (x_i)	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Частоты(f)	44	66	131	165	256	152	108	59	21

Задание 15

1. Что такое σ^2 и как ее рассчитать?
2. Вычислите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ, σ^2 по данным вариационного ряда для настрига шерсти овец (кг):

x_i	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5
f	4	8	52	74	116	171	249	154	96	52	28	2

Постройте вариационную кривую по данным настрига шерсти овец.

Задание 16

1. Напишите формулу для объединения средних арифметических отдельных выборок.
2. По данным выборки составьте вариационный ряд и изобразите его графически:

Выборка коров швицкой породы по живой массе, кг

529 497 530 500 549 548 508 503 562 518 552 550 479 487 491

523 557 545 470 509 515 529 469 493 527 530 490 541 556 543 510 547

529 538 475 483 518 472 520 539 507 512 465 515 524 480 531 462 517

Задание 17

1. Что такое нормированное отклонение (t) и для чего его рассчитывают?
2. По данным о малой длине сеголетков карпа (мм) составьте вариационный ряд и изобразите его графически:

76 78 75 70 68 80 68 77 80 78 75 80 78 79 80 80 72 75 77 65 73 63 69 75 80 79 84

78 73 80 79 79 73 75 73 70 75 72 74 76 80 75 74 77 77 82 69 71 72 67

Задание 18

1. Охарактеризуйте параметры выборочной совокупности.

2. Определите достоверность разности между настригом шерсти (кг) овец с различным типом гемоглобина и вычислите общую σ^2 общ. и $\bar{x}$общ. по трем выборкам:

Тип гемоглобина

I	II	III
A	AB	B
n_1=20	n_2=50	n_3=80
$\bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$=3,10±0,09	$\bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$=2,96±0,06	$\bar{x}_3 \pm s_{\bar{x}_3}$=3,04±0,02
σ_1 = 0,40 кг	σ_2 = 0,42 кг	σ_3 =0,18 кг

Задание 19

1. Что такое нормальное распределение?
2. Определите достоверность разности между настригом шерсти (кг) овец с различным типом гемоглобина и вычислите общую σ^2 общ. и $\bar{x}$общ. по трем выборкам:

Тип гемоглобина

I	II	III
A	AB	B
n_1=14	n_2=125	n_3=268
$\bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1}$=5,39±0,19	$\bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2}$=5,69±0,06	$\bar{x}_3 \pm s_{\bar{x}_3}$=5,45±0,04
σ_1 = 0,71 кг	σ_2 = 0,67 кг	σ_3 =0,65 кг

Задание 20

1. Что такое вариационный ряд?
2. Известна активность ферментов крови в среднем за лактацию ($\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$) у коров трех выборок:

	I	II	III
Амилаза,	n_1=100 2,8±0,35	n_2= 120 13,7±0,35	n_3=48 10,37±0,47
%	σ_1= 0,18	σ_2=0,20	σ_3 = 0,20

Какова достоверность различий в активности фермента амилазы между сравниваемыми группами? Определить σ^2 общ. и $\bar{x}$общ. по трем выборкам.

Задание 21

1. Перечислите и охарактеризуйте способы упорядочивания данных.
2. Исследовали содержание белка (%) в молоке у дочерей и матерей коров чёрно-пёстрой породы:

Дочери

3,1 3,3 3,0 3,2 3,1 3,4 3,2 3,3 3,4 3,2 3,1 3,0 3,4

Матери

3,4 3,0 3,3 3,2 3,0 3,1 3,4 3,4 3,1 3,2 3,1 3,2 3,0

Определите: имеются ли достоверные различия по содержанию белка в молоке между дочерями и матерями.

Задание 22

1. Что такое ошибка средней арифметической?
2. Исследовали содержание молочного жира коров чёрно-пёстрой породы (кг) за I и II лактации:

I лактация

141 124 142 197 178 135 193 147 157 171 165 198 200 190 156 156 183 151 147 204 120 197 150 143 171 175 144 133 208 161 210 139 149 128 154 119 188 213 171 200 135 170 124 164 192 156 206 195

II лактация

241 208 291 177 187 173 258 152 220 179 220 214 199 225 155 201 197 180 191 176 146 209 197 174 163 165 139 189 272 204 161 180 158 194 193 251 258 213 154 1549 222 180 152 183 209

Оцените, имеются ли достоверные различия по содержанию молочного жира у коров за I и II лактации.

Задание 23

1. Что такое σ (сигма)? Как ее вычислить?

2. На основании данных о длине туловища (см) свиноматок кемеровской породы постройте вариационный ряд и изобразите его графически:

153 160 157 150 160 158 151 157 150 160 160 160 145 160 148 153 158
148 154 160 155 148 156 150 149 160 150 155 160 156 160 149 149 152
149 150 148 160 147 150 153 161 162 161 150 155 153 148 147 153 151

Задание 24

1. Гистограмма распределения и как ее построить?
2. Исследовали содержание жира в молоке (%) коров из двух ферм:

1 ферма 3,7 4,1 3,9 3,7 4,3 3,6 3,5 3,8 3,7 3,8 4,1 3,9 3,8 3,6
2 ферма 3,9 3,7 3,8 4,1 3,6 3,9 3,7 3,7 3,9 3,8 3,9 4,0 3,5 3,6

Установите, имеются ли достоверные различия по содержанию жира в молоке коров из 2-х ферм.

Задание 25

1. Нарисуйте кривую нормального распределения.
2. Определите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ^2, σ и доверительные интервалы для генеральной совокупности по данным следующей выборки суточного прироста, г:

691 587 722 812 573 750 700 660 520 640 650 750 630 650

Задание 26

1. Что такое $\bar{x}$? Напишите формулы для расчета средней арифметической.
2. Исследовали массу сеголетков карпа (г) в 2-х прудах:

I пруд 15,7 12,7 9,5 8,5 13,5 8,5 12,5 14,5 13,5 11,6 15,2 13,1 13,0 14,2 13,7
10,6 11,7 13,0 8,6 11,6 8,0 12,6 14,9 13,2 13,5 12,7 15,5 13,0 11,0 14,4
13,7 13,4 12,1 13,3 11,3 10,6 12,4 11,6 11,7 13,4 14,1 13,4 11,2 13,5 13,0

II пруд 7,0 11,1 12,0 5,9 6,5 14,8 11,5 10,0 10,8 11,0 9,0 8,8 9,7 7,2 7,4
13,8 12,7 13,3 12,0 13,4 12,9 10,8 8,9 7,3 9,0 12,7 11,7 13,1 10,1 8,4
13,5 12,4 11,2 9,7 10,8 9,5 13,0 11,5 10,7 13,2 8,3 9,7 8,3 10,7 11,4

Определите, имеются ли достоверные различия по массе сеголетков между I и II прудом.

Задание 27

1. Перечислите и охарактеризуйте основные статистические параметры выборочной совокупности.

2. На основании данных о длине туловища (см) свиноматок кемеровской породы постройте вариационный ряд и изобразите его графически:

160 153 157 150 160 158 151 157 150 160 160 160 145 160 148 153 158
150 154 160 155 148 156 150 149 160 150 155 160 156 160 149 149 152
151 150 148 160 147 150 153 161 162 161 150 155 153 148 147 153 151

Задание 28

1. Перечислите закономерности характерные для нормального распределения.
2. Количество гемоглобина (г%) в 1мл^3 крови у овец породы советский меринос в разное время года характеризовались вариационными рядами:

Апрель

количество Hb, г%	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	10,2	10,4
f	3	7	13	15	25	10	5	2

Сентябрь

количество Hb, г%	12,0	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1
f	7	9	12	17	19	10	5	1

Определите достоверность различий содержания гемоглобина в крови овец в разные периоды года.

Задание 29

1. Перечислите показатели изменчивости признака и дайте определение им.
2. По данным живой массы (кг) свиноматок кемеровской породы по третьему опоросу составьте вариационный ряд и изобразите его графически:

261 235 230 280 260 240 242 259 260 230 277 265 247 223 222 240 261
232 237 250 260 228 220 236 240 241 279 242 228 265 259 274 270 255
240 219 228 242 275 228 245 265 240 243 278 244 241 2 30 227 225 252

Задание 30

1. Что такое σ^2 и что она характеризует?

2. По данным плодовитости свиноматок постройте вариационную кривую. Определите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ^2, σ для плодовитости свиноматок:

Количество поросят у свиноматок,

классы	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	1	2	8	8	19	27	15	4	1

Задание 31

1. Что такое S_x и что характеризует этот параметр?
2. Исследовали массу сеголетков карпа (г) в 2-х прудах:

I пруд

15,7 12,7 9,5 8,5 13,5 8,5 12,5 14,5 13,5 11,6 15,2 13,1 13,0 14,2 13,7

10,6 11,7 13,0 8,6 11,6 8,0 12,6 14,9 13,2 13,5 12,7 15,5 13,0 11,0 14,4

13,7 13,4 12,1 13,3 11,3 10,6 12,4 11,6 11,7 13,4 14,1 13,4 11,2 13,5 13,0

II пруд

7,0 11,1 12,0 5,9 6,5 14,8 11,5 10,0 10,8 11,0 9,0 8,8 9,7 7,2 7,4

13,8 12,7 13,3 12,0 13,4 12,9 10,8 8,9 7,3 9,0 12,7 11,7 13,1 10,1 8,4

13,5 12,4 11,2 9,7 10,8 9,5 13,0 11,5 10,7 13,2 8,3 9,7 8,3 10,7 11,4

Определите, имеются ли достоверные различия по массе сеголетков между I и II прудом.

Задание 32

1. Что такое эксцесс? О чем он может свидетельствовать?
2. По данным плодовитости свиноматок постройте вариационную кривую. Определите $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, σ^2, σ для плодовитости свиноматок:

Число поросят у свиноматок,

классы (x_i)	4	5	6	7	8	9	10	11	12
частоты (f)	1	2	8	8	19	27	15	4	1

Задание 33

1. Перечислите и охарактеризуйте основные статистические параметры выборочной совокупности.

2. По данным живой массы (кг) свиноматок кемеровской породы по третьему опоросу составьте вариационный ряд и изобразите его графически:

262 235 230 280 260 240 242 259 260 230 277 265 247 223 222 240 261
232 237 250 260 228 220 236 240 241 279 242 228 265 259 274 270 255
240 219 228 242 275 228 245 265 240 243 278 244 241 2 30 227 225 252

Задание 34

1. Что означает ранжировать данные? Приведите пример.

2. Количество гемоглобина (г%) в 1 мл^3 крови у овец породы советский меринос в разное время года характеризовались вариационными рядами:

Апрель	Количество Hb, г%	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	10,2	10,4
	f	3	7	13	15	25	10	5	2
Сентябрь	Количество Hb, г%	12,0	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1
	f	7	9	12	17	19	10	5	1

Определите достоверность различий содержания гемоглобина в крови овец в разные периоды года.

Контрольная работа №3 Дисперсионный анализ

Задание № 1

Методом дисперсионного анализа выявить различия между быками-производителями по содержанию жира в молоке дочерей (%)

Бык 1	Бык 2	Бык 3
4,3	3,6	4,0
4,1	3,5	3,8
3,9	3,5	4,0
3,6	3,7	3,9
3,9	4,4	3,9
4,1	4,0	3,8
3,7	3,8	3,8
	3,7	3,7
	4,1	3,8
	4,2	3,8
	4,1	4,0
		4,0
		3,9
		4,4
		4,0
		4,0
		3,7

Задание № 2

Методом дисперсионного анализа выяснить различия между быками-производителями по живому весу дочерей (кг)

Бык 4	Бык 5	Бык 6
425	443	470
520	482	450
500	360	530
490	420	540
530	380	520
550	410	450
570		492
570		460
470		420
490		520
418		
450		
488		
420		
420		
350		
480		
390		
540		
580		

Задание № 3

Методом дисперсионного анализа выявить влияние радиации на величину помета у разных самок

Группа	Число мышат от отдельных самок					
Контроль	10	12	11	10	11	10

Доза 100 Р	8	10	7	9		
Доза 200 Р	7	9	6	4	5	

Задание №4

Методом дисперсионного анализа выявить различия между быками-производителями по удою дочерей (ц)

Бык 7	Бык 8	Бык 9
44	36	45
42	37	45
32	35	48
45	36	5
48	42	53
52	40	49
50	41	50
39	37	48
53	34	51
44	37	
52		

Задание № 5

Методом дисперсионного анализа выявить различия между быками-производителями по удою дочерей (ц)

Бык 1	Бык 2	Бык 3
50	45	50
50	41	49
30	60	49
46	34	40
47	48	37
37	37	38
29		40
48		34
28		38
45		30
46		51
34		
43		
34		
41		

Задание № 6

Методом дисперсионного анализа выявить различия между быками-производителями по содержанию белка в молоке дочерей (%)

Бык 4	Бык 5	Бык 6
3,1	3,3	3,0
3,3	3,8	2,9
3,1	3,2	3,0
3,2	3,4	3,1
3,3	3,4	3,4
3,3	3,6	3,3
3,3	3,6	3,3
3,0	3,4	3,3
3,1	3,3	3,4
3,2	3,3	
3,2		

Задание № 7

Методом дисперсионного анализа выяснить влияние длительности плодоношения на живой вес ягнят при рождении (кг)

Длительность беременности (дни)			
145	148	150	153
3,8	4,0	4,1	4,4
2,9	5,2	4,3	4,7
3,3	4,3	5,4	3,9
3,6	2,9	3,1	4,6
3,8	4,1	4,0	5,7
3,7	3,9	4,0	4,3
4,8	3,2	4,3	4,8
5,1	3,9	3,9	4,9
3,4	4,1	4,0	4,7

Задание № 8

Методом дисперсионного анализа выяснить влияние длительности плодоношения на живой вес ягнят при рождении (кг)

Длительность беременности (дни)	Живой вес отдельных ягнят при рождении (кг)									
145	4,1	5,1	3,5	2,8	4,2	4,1	4,0	3,9	4,6	3,5
148	4,4	5,7	3,9	4,5	4,4	4,3	3,8	4,1	4,5	4,4
150	4,5	5,0	5,2	4,6	4,3	4,0	4,7	4,6	5,1	
153	4,8	5,5	5,2	4,9	4,5	4,9	4,4	3,1	5,3	

Задание № 9

Методом дисперсионного анализа выявить различия между быками-производителями по содержанию жира в молоке дочерей (%)

Бык 7	Бык 8	Бык 9
3,7	3,8	3,5
3,8	4,0	3,6
4,0	3,8	3,6
3,9	4,0	3,7
3,7	3,9	3,6
3,8	3,9	3,7
3,8	3,9	3,4
3,8	4,0	3,5
3,7	4,1	3,6
3,8	3,9	
3,7		

Задание № 10

Методом дисперсионного анализа выяснить влияние длительности плодоношения на живой вес ягнят при рождении (кг)

Длительность беременности (дни)			
145	148	150	153
3,8	4,0	4,1	4,4
2,9	5,2	4,3	4,7
3,3	4,3	5,4	3,9
3,6	2,9	3,1	4,6
3,8	4,1	4,0	5,7
3,7	3,9	4,0	4,3
4,8	3,2	4,3	4,8
5,1	3,9	3,9	4,9
3,4	4,1	4,0	4,7
3,3	4,0		

Задание № 11

Анализируется генотипическое разнообразие самцов (А) норки. Скрещивание самцов (А) с самками (В). Признак – плодовитость.

Оценить:

1. Разнообразие самцов (А)
2. Разнообразие самок (В)
3. Сочетаемость (А x В)

A_1			A_2			A_3			A_4		
B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
3	4	6	4	6	10	6	7	9	3	12	10
4	4	6	5	7	11	4	8	10	4	12	11
3	5	8	6	6	10	4	9	11	4	13	10
4	4	8	6	8	10	4	7	12	6	12	9
3	5	4	5	9	9	3	8	13	5	13	9
2			4	9		4	9	12	5	13	8
			3			5	9	12		14	8
							6	10		14	10

Задание № 12

Методом дисперсионного анализа выявить различия между быками-производителями по удою дочерей (ц)

Бык 10	Бык 11	Бык 12
44	36	45
42	37	45
32	35	48
45	36	52
48	42	53
52	40	49
50	41	50
39	37	48
53	34	51
44	37	

Задание № 13

Методом дисперсионного анализа выявить различия между быками-производителями по содержанию белка в молоке дочерей (%)

Бык 10	Бык 11	Бык 12
3,1	3,3	3,0
3,3	3,8	2,9
3,1	3,2	3,0
3,2	3,4	3,1
3,3	3,4	3,4
3,3	3,6	3,3
3,3	3,6	3,3
3,0	3,4	3,3
3,1	3,3	3,4
3,2	3,3	
3,2		

Задание № 14

Методом дисперсионного анализа выяснить влияние длительности плодоношения на живой вес ягнят при рождении (кг)

Длительность беременности (дни)	Живой вес отдельных ягнят при рождении (кг)									
145	4,1	5,1	3,5	2,8	4/2	4,1	4,0	3,9	4,6	3,5
148	4,4	5,7	3,9	4,5	4,4	4,3	3,8	4,1	4,5	4,4
150	4,5	5,0	5,2	4,6	4,3	4,0	4,7	4,6	5,1	
153	4,8	5,5	5,2	4,9	4,5	4,9	4,4	3,1	5,3	

Задание № 15

Гибридные крысы (А) вскармливались самками разных генотипов (В). В таблице приведены средние веса крыс по каждому помету на 28-ой день вскармливания (г).

Оценить:

1. Различия между гибридами (А)
2. Различия между генотипами (В)
3. Имеются ли взаимодействия (А x В)

A_1				A_2				A_3				A_4			
B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4
62	55	53	42	60	51	57	51	37	56	40	50	59	60	45	45
68	42	62	54	52	65	59	41	36	70	46	44	58	53	57	52
64	60	50	61	49	62	47		68	67	61	55	54	56	61	53
65		53	48	48	64	53				55					42
60			40		62					56					54

Задание № 16

Исследуется плодовитость норок: А - самцы; В – самки.

Оценить:

1. Влияние самцов
2. Влияние самок
3. Сочетаемость самцов и самок (А x В)

A_1			A_2			A_3			A_4		
B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
3	7	8	4	8	13	4	10	11	4	12	20
4	6	9	3	9	12	6	11	12	6	14	21
5	7	10	5	10	11	5	12	16	6	15	20
7	8	12	6	11	14	7	13	17	7	17	22
				12	14	8	14	15	8	18	19
					15		15	18	9		18

4.2. Тестовые вопросы

Выполнил(а) студент(ка)________гр.
(№ группы)

____
(Фамилия Имя Отчество)

1. Что показывает варианта?[4] *(1)*[5]

Изменчивость признака.
Связь между признаками.
Среднее значение признака по выборке.
Значение отдельно взятого наблюдения.

2. Что показывает варианса? *(1)*

Изменчивость признака.
Связь между признаками.
Среднее значение признака по выборке.
Значение отдельно взятого наблюдения.

3. Какой тип распределения характерен для описания качественных признаков? (выберите нужное(-ые)) *(1)*

Нормальное распределение.
Биномиальное распределение.
Распределение Пуассона.

4. Какой тип распределения характерен для описания количественных признаков? *(1)*

Нормальное распределение.
Биномиальное распределение.
Распределение Пуассона.

5. Какой показатель характеризуют выражения $\sum(x_i - \bar{x})^2$, $\frac{PQ}{n-1}$? *(1)*

Средняя арифметическая.
Дисперсия.
Среднее квадратическое отклонение.
Варианса.
Коэффициент корреляции.
Нормированное отклонение.

6. Какой показатель характеризуют выражения $\sqrt{pq}$, $\sqrt{\frac{S}{n-1}}$? *(1)*

Средняя арифметическая.
Дисперсия.
Среднее квадратическое отклонение.
Варианса.
Коэффициент корреляции.
Нормированное отклонение.

7. Какой показатель характеризует выражение $\frac{\sum t_x \cdot t_y}{n-1}$? *(1)*

Средняя арифметическая.
Дисперсия.
Среднее квадратическое отклонение.
Варианса.
Коэффициент корреляции.
Нормированное отклонение.

[4] Здесь и далее (для аналогичных заданий): выберите правильный(ые) ответ(ы) из списка, отметив крестиком или галочкой квадратик напротив.

[5] Количество получаемых баллов за правильный ответ(ы) или решение.

8. Укажите соответствие терминов и обозначений.[6] *(3)*

$\bar{x}$	Коэффициент корреляции
S	Коэффициент вариации
$s_{\bar{x}}$	Стандартное отклонение
x_i	Средняя арифметическая
σ	Варианса
σ^2	Варианта
r	Ошибка средней арифметической
Cv	Дисперсия

9. В каких случаях применяется преобразование Фишера? *(1)*

При р<0,25; q>0,75.

При р<0,40; q>0,60.

При р=0,50; q=0,50.

10. Как правильно вычислять показатели описательной статистики при большом числе наблюдений (n>30) без применения средств вычислительной техники? *(1)*

Применять метод сумм или метод условных отклонений.

Использовать прямой метод расчета.

Построить вариационный ряд и изобразить его графически.

Применять критерий Стьюдента.

11. Найдите значение медианы в следующем ряде.[7] *(2)*

1, 2, 3, 2, 5, 3, 5, 4, 2 Ответ:_________

12. Найдите значение моды в следующем ряде. *(2)*

1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 2 Ответ:_________

13. Укажите соответствия выполняемых действий поставленным задачам. *(3)*

Задача	Действие
Найти достоверность разности средних арифметических	Определить величину нормированного отклонения
Определить величину связи между признаками	Рассчитать коэффициент корреляции
Определить отклонение отдельно взятой x_i от $\bar{x}$ в σ	Определить критерий Стьюдента
Определить соответствие фактического распределения нормальному распределению	Использовать критерий хи-квадрат
Сравнить величину изменчивости содержания жира в молоке и удоя	Рассчитать коэффициент вариации

14. Укажите методы, позволяющие оценить достоверность разности средних. *(1)*

Дисперсионный анализ.

Корреляционный анализ.

Метод сумм.

Метод условных отклонений.

Вычисление критерия Стьюдента.

Использование преобразование Фишера (метод угла φ).

[6] Здесь и далее (для аналогичных заданий): соедините прямыми линиями соответствующие символам описания.

[7] Здесь и далее (для аналогичных заданий): напишите ответ в поле «Ответ»

15. Какой ряд называют вариационным? Укажите нужное. *(1)*

- Двойной ряд классов и частот.
- Ряд чисел, расположенных в порядке возрастания.
- Ряд чисел, расположенных в порядке убывания.
- Ряд рангов.
- Ряд вариант, расположенных в случайном порядке.

16. В каких случаях можно применять критерий Стьюдента? Укажите нужное. *(1)*

- В случае наличия средних арифметических, вычисленных для разных выборок.
- В случае наличия средних арифметических, вычисленным по выборкам, принадлежащим одной генеральной совокупности.
- При необходимости оценить тип распределения.
- При выявлении достоверной разности средних.
- При необходимости определения величины связи двух признаков.
- При необходимости прогнозирования.

17. Напишите формулу вычисления коэффициента вариации[8]. *(3)*
Формула:______________________________

18. Напишите формулу вычисления нормированного отклонения. *(3)*
Формула:______________________________

19. Укажите статистические методы, позволяющие оценить степень соответствия характера распределений (при сравнении соответствия фактических распределений и тестировании гипотез). Выберите нужное. *(1)*

- Критерий χ^2.
- Метод «лямбда» (Колмогорова-Смирнова).
- Дисперсионный анализ.
- Корреляционный анализ.
- Метод сумм.
- Метод условных отклонений.
- Критерий Вилкоксона-Манна-Уитни.
- Преобразование Фишера (метод φ).

20. Какой показатель определяется выражением: $\frac{\sum x_i}{n}$? *(2)* Ответ:__________________________

21. Вставьте в выражение недостающие элементы: $3{,}3\_\_\_\_ - \bar{x} + 3{,}3\_\_\_\_$? *(2)*
Ответ:__________________________

22. Какой показатель определяется выражением: $\sum (x_i - \bar{x})^2$? *(2)*
Ответ:__________________________

23. Какой показатель определяется выражением: $\frac{(x_{max} - x_{min})}{\text{кол-во классов}}$? *(2)*
Ответ:__________________________

24. Для чего служит преобразование Фишера? *(1)*

- Для оценки уровня связи между признаками.
- Для оценки достоверности разности средних.
- Для вычисления среднего арифметического.
- Для сравнения характера распределения эмпирических и теоретических частот.
- Для оценки величины изменчивости признаков.

25. Если уменьшить все варианты выборки совокупности в 5 раз, то средняя арифметическая[9] *(1)*

- увеличится в 5 раз;
- уменьшится в 5 раз;
- не изменится.

[8] Здесь и далее (для аналогичных задач): напишите в поле «Формула» необходимую формулу.

[9] Здесь и далее (для аналогичных заданий): продолжите предложение, выбрав правильное высказывание из списка.

26. Коэффициент корреляции может принимать значения: *(1)*

от - ∞ до + ∞ ;
от 0 до + ∞ ;
от 0 до 1;
от -1 до +1;
произвольные значения.

27. Линейный коэффициент корреляции характеризует *(1)*

силу и направление связи;
изменение одного признака при изменении другого на единицу;

28. Как называется статистический метод, позволяющий получить двойной ряд классов и частот? *(1)*

Регрессионный анализ.
Метод сумм.
Метод условных отклонений.
Метод построения вариационного ряда.
Метод нахождения критерия хи-квадрат.

29. Какие статистические методы можно отнести к непараметрическим? *(1)*

Корреляционный анализ.
Регрессионный анализ.
Метод определения критерия «лямбда» (Колмогорова-Смирнова).
Метод определения критерия Манна-Уитни.
Метод сумм.
Метод условных отклонений.
Метод определения критерия Стьюдента.

30. Какой тип графического изображения применяют при анализе характера распределения признаков, характеризующихся непрерывным характером распределения? *(1)*

График рассеяния.
Гистограмма распределения.
Круговая диаграмма.
Полигон распределения.
Пузырьковая диаграмма.

31. Какой тип графического изображения применяют при анализе характера распределения признаков, характеризующихся прерывистым характером распределения? *(1)*

График рассеяния.
Гистограмма распределения.
Круговая диаграмма.
Полигон распределения.
Пузырьковая диаграмма.

32. Что показывает коэффициент внутриклассовой корреляции? *(1)*

Силу влияния фактора (группирующего признака) на уровень зависимого признака.
Связь между двумя признаками.
Уровень изменчивости признака.
Уровень изменения одного признака при изменении другого (парного) на единицу.

33. Какое из приведённых выражений верно?[10] *(1)*

$\sigma = \sum (x_i - \bar{x})^2$ (1), $t_d = \dfrac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s_{\bar{x}_1}{}^2 + s_{\bar{x}_2}{}^2}}$ (2), $S = \dfrac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s_{\bar{x}_1}{}^2 + s_{\bar{x}_2}{}^2}}$ (3)   Ответ:___________

34. Нулевая гипотеза (H_0) говорит о том, что между двумя совокупностями ***отсутствует присутствует*** достоверная разность между $\bar{x}$ и другим показателям, а имеющиеся являются случайными.[11] *(1)*

35. Какие из ниже перечисленных уровней значимости показывают статистически значимые результаты вычислений? *(1)*

P<0,20
P<1,00
P<0,02
P<0,01
P<0,50
P>0,05

36. Какие значения может принимать коэффициент регрессии? Выберите правильное. *(1)*

От - ∞ до + ∞ .
От 0 до + ∞ .
От 0 до 1.
От -1 до +1.
Произвольные значения.

[10] Введите в поле «Ответ» номер правильной формулы.

[11] Зачеркните ненужное слово (варианты выделены курсивом) в предложении.

37. Какой класс принято называть модальным? *(1)*

Класс, содержащий наименьшее число вариант.
Класс, содержащий наименьшую величину нормированного отклонения.
Класс, содержащий наибольшее число вариант.
Класс, в котором отсутствуют варианты.
Класс, содержащий наибольшую величину нормированного отклонения.

38. Какой тип распределения используется для характеристики статистических параметров для такого признака, как «удой»? *(1)*

Нормальное распределение.
Биномиальное распределение.
Распределение Пуассона.

39. Какой тип распределения используется для характеристики статистических параметров для такого признака, как «частота заболеваемости маститом»? *(1)*

Нормальное распределение.
Биномиальное распределение.
Распределение Пуассона.

40. Какой ряд называют ранжированным? Укажите нужное. *(1)*

Двойной ряд классов и частот.
Ряд чисел, расположенных в порядке возрастания.
Ряд чисел, расположенных в порядке убывания.
Ряд рангов.
Ряд вариант, расположенных в случайном порядке.

Результаты тестирования:

Правильных ответов:______________________
Неправильных ответов:___________________________
Количество набранных баллов:_______

Итоговая оценка:_________________________

Проверил:________________________________

Дата тестирования:_____._____.202___г.

____
(подпись преподавателя)

РАЗДЕЛ 5. Задания по контрольным работам для студентов заочной формы обучения

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, внимательно ознакомьтесь с содержанием методических указаний.

Номера вопросов, которые должны быть освещены в контрольной работе, устанавливаются по приведенной ниже таблице 17 с учетом учебного шифра студента. Например, учебный шифр студента 1284. Для нахождения номеров вопросов контрольного задания нужно в первой вертикальной графе таблицы найти предпоследнюю цифру учебного шифра -8, а в первой (заглавной) строке таблицы - последнюю цифру шифра, т.е. 4. В клетке таблицы, находящейся на месте пересечения указанных граф расположены номера вопросов контрольной работы: 24, 29, 25, 22, 40.

Таблица 17. Поиск вопросов для студентов заочной формы обучения

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7, 2, 30, 12, 41	22, 18, 34, 29, 33	38, 28, 23, 1, 6	19, 23, 25, 38, 17	38, 26, 29, 12, 28	16, 8, 32, 22, 10	37, 28, 5, 1, 23	18, 21, 27, 12, 8	13, 30, 26, 17, 20	29, 24, 12, 9, 20
2	22, 11, 24, 7, 41	37, 12, 39, 22, 20	17, 3, 21, 37, 40	38, 21, 23, 35, 2	15, 1, 39, 4, 6	3, 5, 27, 17, 36	2, 26, 11, 9, 31	36, 10, 16, 26, 6	5, 13, 4, 24, 22	3, 1, 28, 2, 4
3	24, 40, 31, 6, 39	8, 33, 18, 24, 5	31, 34, 25, 17, 12	23, 33, 41, 3, 30	17, 21, 34, 33, 2	27, 34, 21, 17, 15	26, 36, 5, 12, 11	28, 32, 4, 20, 1	2, 4, 27, 33, 30	21, 13, 8, 29, 36
4	6, 15, 5, 17, 4	36, 23, 29, 19, 35	28, 22, 20, 3, 30	15, 6, 1, 14, 21	27, 37, 32, 24, 26	13, 24, 5, 7, 34	9, 20, 39, 22, 12	24, 29, 25, 22, 40	36, 37, 13, 30, 35	13, 19, 21, 31, 9
5	10, 1, 36, 6, 19	14, 26, 28, 33, 10	10, 11, 6, 36, 31	6, 23, 36, 7, 8	12, 11, 7, 26, 16	34, 21, 38, 29, 10	22, 4, 5, 35, 21	13, 35, 34, 20, 39	15, 13, 9, 26, 17	33, 10, 15, 1, 3
6	27, 34, 22, 32, 30	5, 25, 3, 21, 26	17, 29, 8, 18, 30	9, 41, 1, 12, 38	11, 32, 33, 7, 35	29, 3, 9, 19, 1	25, 8, 5, 14, 32	10, 34, 9, 2, 22	27, 29, 12, 39, 30	37, 26, 31, 22, 33
7	39, 41, 4, 36, 35	17, 6, 30, 33, 22	41, 3, 32, 17, 13	18, 2, 40, 39, 16	5, 26, 34, 16, 23	40, 20, 18, 1, 36	2, 38, 20, 36, 3	3, 41, 33, 40, 30	27, 23, 35, 16, 37	6, 16, 9, 2, 1
8	30, 3, 8, 20, 34	27, 17, 31, 24, 20	8, 38, 5, 15, 11	33, 3, 24, 2, 25	16, 22, 30, 13, 12	31, 28, 14, 5, 35	32, 24, 28, 33, 16	13, 11, 33, 39, 34	8, 38, 7, 25, 16	34, 31, 17, 23, 15
9	20, 26, 8, 2, 9	1, 38, 10, 7, 33	19, 17, 18, 26, 29	27, 23, 40, 15, 2	20, 22, 21, 12, 28	2, 13, 23, 11, 35	40, 25, 9, 27, 17	10, 23, 8, 30, 17	38, 4, 7, 17, 30	28, 10, 11, 26, 32

Рекомендуемая литература

1. Статистический анализ данных в MS Excel: Учебное пособие / А.Ю. Козлов, В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов. - М.: ИНФРА-М, 2014. - 320 с. [Адрес доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=238654].
2. Статистические методы обработки экспериментальных данных с использованием пакета MathCad: Учебное пособие/Ф.И. Карманов, В.А. Острейковский - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 208 с. [Адрес доступа http://znanium.com/bookread2.php?book= 508241].
3. Основы статистического анализа. Практ. по стат. мет. и исслед. операций с исп. пакетов STATISTICA и EXCEL: Уч.пос./ Э.А.Вуколов - 2 изд., испр. и доп. - М.: Форум: НИЦ Инфра-М, 2013. - 464 с.
4. Дунченко, Н. И. Управление качеством в отраслях пищевой промышленности [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Н. И. Дунченко, М. Д. Магомедов, А. В. Рыбин. - 4-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. - 212 с.
5. Математическая статистика: Учебное пособие / Р.Ш. Хуснутдинов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 205 с.Васильева Л.А. Статистические методы в биологии: Учебное пособие по курсу лекций “Биометрия”. – Новосибирск: ИЦиГ СО РАН, 2004. – 127 с.
6. Васильева Л.А. Биологическая статистика: Учебное пособие по курсу лекций “Биометрия”. – Новосибирск: ИЦиГ СО РАН, 2000. – 124 с.
7. Кожухарь Л.И. Основы общей теории статистики. - М.: Финансы и статистика, 2001.- 144 с.
8. Васильева Л.А. Биометрия. Учебное пособие к курсу лекций “Биометрия”. - Новосибирск, 1999.-110 с.
9. Лакин Г.Ф. Биометрия. - М.: Высш. шк., 1990.- 352 с.
10. Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика. - Минск: Высшая школа, 1973.- 319 с.

11. Плохинский Н.А. Биометрия Новосибирск: Наука СО АН СССР, 1961.- 364 с.
12. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. – 2007.- 349 с.
13. Снедекор Дж.У. Статистические методы в приложении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. - М.: Сельхозиздат, 1961.- 503 с.
14. Урбах В.Ю. Биометрические методы. - М.: Наука, 1964.- 415 с.
15. Глотов Н.В., Животовский Л.А., Хованов Н.В. и др. Биометрия. - Л.: ЛГУ, 1982.- 463с.
16. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. - М.: ИЛ,1960.-434 с.
17. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. - М.: Физикоматематическая лит-ра, 1963.- 625 с.
18. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. Пособие для вузов. Изд. 7-е,стер. - М.: Высш. шк., 1999.- 479 с.
19. Изменчивость и методы ее изучения: Метод. Рекомендации/ Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. В.Л. Петухов, А.И. Желтиков, О.С. Короткевич. - Новосибирск, 2007.- 87 с.
20. Кожухарь Л.И. Основы общей теории статистики. - М.: Финансы и статистика, 2001.- 144 с.
21. Меркурьева Е. К. Биометрия в генетике и селекции сельскохозяйственных животных //М.: Колос. – 1970. –424 с.
22. Меркурьева Е.К. Генетические основы селекции в скотоводстве. - М.: Колос, 1977.- 240 с.
23. Левин А. Самоучитель работы на компьютере, 6-е изд.- М.: Нолидж, 1999.- 656 с.
24. Додж М., Симпсон К. Эффективная работа с Microsoft Exel 2000.- СПб.: Питер, 2001.- 1056 с.
25. Фолконер Д.С. Введение в генетику количественных признаков. – М.:Агропромиздат, 1985.- 486 с.

26. Мазер К., Джинкс Дж. Биометрическая генетика: Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.- 463с.
27. Уфимцева Н.С., Васильева Л.А. Теоретические основы и методы оценки племенных качеств сельскохозяйственных животных. – Новосибирск: ИЦиГ СО РАН, 1995. – 80с.
28. Уикем Х., Гроссер М., Бумани Х. R. К вершинам мастерства / пер. с англ. А.Ю. Гинько. – М.: ДМК Пресс, 2024.– 748 с.
29. Интернет ресурс: http://ru.wikipedia.org/wiki/T-критерий_Стьюдента.
30. Интернет ресурс: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерий_Стьюдента.
31. Интернетресурс: http://www.statsoft.ru/home/portal/applications/HYPERLINK "http://www.statsoft.ru/home/portal/applications/Multivariatadvisor/" Multivariatadvisor/HYPERLINK "http://www.statsoft.ru/home/portal/applications/Multivariatadvisor/T-Student/T-Student.htm" T-Student/T-Student.htm
32. Интернет ресурс: http://ru.wikipedia.org/wiki/Критерий_Краскела_-_Уоллиса
33. Интернет ресурс: http://www.psychol-ok.ru/statistics/wilcoxon/
34. Интернет ресурс: http://www.statsoft.ru/home/portal/glossary/glossarytwo/W/HYPERLINK
35. Интернет-ресурс: http://www.statsoft.ru/home/portal/glossary/glossarytwo/W/WilcoxonTest.htm» WilcoxonTest.htm

Приложения

Приложение 1

Критические значения *t*-критерия

df	***P***							
	0,80	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,995**	**0,998**	**0,999**
1	3,0770	6,3130	12,7060	31,820	63,656	127,656	318,306	636,619
2	1,8850	2,9200	4,3020	6,964	9,924	14,089	22,327	31,599
3	1,6377	2,35340	3,182	4,540	5,840	7,458	10,214	12,924
4	1,5332	2,13180	2,776	3,746	4,604	5,597	7,173	8,610
5	1,4759	2,01500	2,570	3,649	4,0321	4,773	5,893	6,863
6	1,4390	1,943	2,4460	3,1420	3,7070	4,316	5,2070	5,958
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,998	3,4995	4,2293	4,785	5,4079
8	1,3968	1,8596	2,3060	2,8965	3,3554	3,832	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,780
10	1,3720	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	1,363	1,795	2,201	2,718	3,105	3,496	4,024	4,437
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0845	3,4284	3,929	4,178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,1123	3,3725	3,852	4,220
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,976	3,3257	3,787	4,140
15	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,732	4,072
16	1,3360	1,7450	2,1190	2,5830	2,9200	3,2520	3,6860	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5668	2,8982	3,2224	3,6458	3,965
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5514	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,08600	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	1,3230	1,7200	2,20790	2,5170	2,8310	3,1350	3,5270	3,8190
22	1,3212	1,7117	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921

23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
26	1,315	1,705	2,059	2,478	2,778	3,0660	3,4360	3,7060
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0360	3,3962	3,8494
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
32	1,3080	1,6930	2,0360	2,4480	2,7380	3,0140	3,3650	3,6210
34	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,9520	3,3479	3,6007
36	1,3050	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	9,490	3,3326	3,5821
38	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	3,9808	3,3190	3,5657
40	1,303	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,9712	3,3069	3,5510
42	1,320	1,682	2,018	2,418	2,6980	2,6930	3,2960	3,5370
44	1,301	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	3,9555	3,2861	3,5258
46	1,300	1,6767	2,0129	2,4102	2,6870	3,9488	3,2771	3,5150
48	1,299	1,6772	2,0106	2,4056	2,6822	3,9426	3,2689	3,5051
50	1,298	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,9370	3,2614	3,4060
55	1,2997	1,673	2,0040	2,3960	2,6680	2,9240	3,2560	3,4760
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,9146	3,2317	3,4602
65	1,2947	1,6686	1,997	2,3851	2,6536	3,9060	3,2204	3,4466
70	1,2938	1,6689	1,9944	2,3808	2,6479	3,8987	3,2108	3,4350
80	1,2820	1,6640	1,9900	2,3730	2,6380	2,8870	3,1950	3,4160
90	1,2910	1,6620	1,9867	2,3885	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905
120	1,2888	1,6577	1,9719	2,3578	2,6174	2,8598	3,1595	3,3735

150	1,2872	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090	2,8482	3,1455	3,3566
200	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	2,8385	3,1315	3,3398
250	1,2849	1,6510	1,9695	2,3414	2,5966	2,8222	3,1232	3,3299
300	1,2844	1,6499	1,9679	2,3388	2,5923	2,8279	3,1176	3,3233
400	1,2837	1,6487	1,9659	2,3357	2,5882	2,8227	3,1107	3,3150
500	1,2830	1,6470	1,9640	2,3330	2,7850	2,8190	3,1060	3,3100

Приложение 2

Критические значения критерия Фишера (F) для $\alpha = 0,1$

df_2	df_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06	63,33
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00	1,97
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,90
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67	1,63

df_2	df_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57	1,53
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54	1,50
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53	1,49
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51	1,47
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50	1,46
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42	1,38
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35	1,29
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,54	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26	1,19
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17	1,00

Критические значения критерия Фишера (F) для $\alpha = 0,05$

df_2	df_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	271	242	243	244	246	248	249	250	251	252	253
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90

	df_1																		
df_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35

Критические значения критерия Фишера (F) для $\alpha = 0{,}01$

	df_1																	
df_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46

22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53

Критические значения критерия Фишера (F) для $\alpha = 0{,}001$

df_2	df_1																	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**
1	405284	499999	540379	562500	576405	585937	592873	598144	602284	605621	610668	615764	620908	623497	626099	628712	631337	633972
2	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
3	167	149	141	137	135	133	132	131	130	129	128	127	126	126	125	125	124	124
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,83	28,16	27,65	27,24	26,92	26,42	25,91	25,39	25,13	24,87	24,60	24,33	24,06
6	35,51	27,00	23,70	21,92	20,80	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	17,99	17,56	17,12	16,90	16,67	16,44	16,21	15,98
7	29,25	21,69	18,77	17,20	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91
8	25,41	18,49	15,83	14,39	13,48	12,86	12,40	12,05	11,77	11,54	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	8,00
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,93	9,52	9,20	8,96	8,75	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,18
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59
13	17,82	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,52	6,23	5,93	5,78	5,63	5,47	5,30	5,14
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,44	7,08	6,80	6,58	6,40	6,13	5,85	5,56	5,41	5,25	5,10	4,94	4,77
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08	5,81	5,54	5,25	5,10	4,95	4,80	4,64	4,47
16	16,12	10,97	9,01	7,94	7,27	6,80	6,46	6,19	5,98	5,81	5,55	5,27	4,99	4,85	4,70	4,54	4,39	4,23
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58	5,32	5,05	4,78	4,63	4,48	4,33	4,18	4,02
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,56	5,39	5,13	4,87	4,59	4,45	4,30	4,15	4,00	3,84
19	15,08	10,16	8,28	7,27	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	4,97	4,70	4,43	4,29	4,14	3,99	3,84	3,68
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,08	4,82	4,56	4,29	4,15	4,00	3,86	3,70	3,54
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31	5,11	4,95	4,70	4,44	4,17	4,03	3,88	3,74	3,58	3,42

22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83	4,58	4,33	4,06	3,92	3,78	3,63	3,48	3,32
23	14,20	9,47	7,67	6,70	6,08	5,65	5,33	5,09	4,89	4,73	4,48	4,23	3,96	3,82	3,68	3,53	3,38	3,22
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99	4,80	4,64	4,39	4,14	3,87	3,74	3,59	3,45	3,29	3,14
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,89	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56	4,31	4,06	3,79	3,66	3,52	3,37	3,22	3,06
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48	4,24	3,99	3,72	3,59	3,44	3,30	3,15	2,99
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41	4,17	3,92	3,66	3,52	3,38	3,23	3,08	2,92
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35	4,11	3,86	3,60	3,46	3,32	3,18	3,02	2,86
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29	4,05	3,80	3,54	3,41	3,27	3,12	2,97	2,81
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24	4,00	3,75	3,49	3,36	3,22	3,07	2,92	2,76
40	12,61	8,25	6,59	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,64	3,40	3,14	3,01	2,87	2,73	2,57	2,41
60	11,97	7,77	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,86	3,69	3,54	3,32	3,08	2,83	2,69	2,55	2,41	2,25	2,08
120	11,38	7,32	5,78	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	3,02	2,78	2,53	2,40	2,26	2,11	1,95	1,77

Приложение 3

Критические значения критерия хи-квадрат

df	***P***												
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,00393	0,01579	0,10153	0,45494	1,32330	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944
2	0,01003	0,02010	0,05064	0,10259	0,21072	0,57536	1,38629	2,77259	4,60517	5,99146	7,37776	9,21034	10,59663
3	0,07172	0,11483	0,21580	0,35185	0,58437	1,21253	2,36597	4,10834	6,25139	7,81473	9,34840	11,34487	12,83816
4	0,20699	0,29711	0,48442	0,71072	1,06362	1,92256	3,35669	5,38527	7,77944	9,48773	11,14329	13,27670	14,86026
5	0,41174	0,55430	0,83121	1,14548	1,61031	2,67460	4,35146	6,62568	9,23636	11,07050	12,83250	15,08627	16,74960
6	0,67573	0,87209	1,23734	1,63538	2,20413	3,45460	5,34812	7,84080	10,64464	12,59159	14,44938	16,81189	18,54758
7	0,98926	1,23904	1,68987	2,16735	2,83311	4,25485	6,34581	9,03715	12,01704	14,06714	16,01276	18,47531	20,27774
8	1,34441	1,64650	2,17973	2,73264	3,48954	5,07064	7,34412	10,21885	13,36157	15,50731	17,53455	20,09024	21,95495
9	1,73493	2,08790	2,70039	3,32511	4,16816	5,89883	8,34283	11,38875	14,68366	16,91898	19,02277	21,66599	23,58935
10	2,15586	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	6,73720	9,34182	12,54886	15,98718	18,30704	20,48318	23,20925	25,18818
11	2,60322	3,05348	3,81575	4,57481	5,57778	7,58414	10,34100	13,70069	17,27501	19,67514	21,92005	24,72497	26,75685
12	3,07382	3,57057	4,40379	5,22603	6,30380	8,43842	11,34032	14,84540	18,54935	21,02607	23,33666	26,21697	28,29952
13	3,56503	4,10692	5,00875	5,89186	7,04150	9,29907	12,33976	15,98391	19,81193	22,36203	24,73560	27,68825	29,81947
14	4,07467	4,66043	5,62873	6,57063	7,78953	10,16531	13,33927	17,11693	21,06414	23,68479	26,11895	29,14124	31,31935
15	4,60092	5,22935	6,26214	7,26094	8,54676	11,03654	14,33886	18,24509	22,30713	24,99579	27,48839	30,57791	32,80132
16	5,14221	5,81221	6,90766	7,96165	9,31224	11,91222	15,33850	19,36886	23,54183	26,29623	28,84535	31,99993	34,26719
17	5,69722	6,40776	7,56419	8,67176	10,08519	12,79193	16,33818	20,48868	24,76904	27,58711	30,19101	33,40866	35,71847
18	6,26480	7,01491	8,23075	9,39046	10,86494	13,67529	17,33790	21,60489	25,98942	28,86930	31,52638	34,80531	37,15645
19	6,84397	7,63273	8,90652	10,11701	11,65091	14,56200	18,33765	22,71781	27,20357	30,14353	32,85233	36,19087	38,58226
20	7,43384	8,26040	9,59078	10,85081	12,44261	15,45177	19,33743	23,82769	28,41198	31,41043	34,16961	37,56623	39,99685
21	8,03365	8,89720	10,28290	11,59131	13,23960	16,34438	20,33723	24,93478	29,61509	32,67057	35,47888	38,93217	41,40106

22	8,64272	9,54249	10,98232	12,33801	14,04149	17,23962	21,33704	26,03927	30,81328	33,92444	36,78071	40,28936	42,79565
23	9,26042	10,19572	11,68855	13,09051	14,84796	18,13730	22,33688	27,14134	32,00690	35,17246	38,07563	41,63840	44,18128
24	9,88623	10,85636	12,40115	13,84843	15,65868	19,03725	23,33673	28,24115	33,19624	36,41503	39,36408	42,97982	45,55851
25	10,51965	11,52398	13,11972	14,61141	16,47341	19,93934	24,33659	29,33885	34,38159	37,65248	40,64647	44,31410	46,92789
26	11,16024	12,19815	13,84390	15,37916	17,29188	20,84343	25,33646	30,43457	35,56317	38,88514	41,92317	45,64168	48,28988
27	11,80759	12,87850	14,57338	16,15140	18,11390	21,74940	26,33634	31,52841	36,74122	40,11327	43,19451	46,96294	49,64492
28	12,46134	13,56471	15,30786	16,92788	18,93924	22,65716	27,33623	32,62049	37,91592	41,33714	44,46079	48,27824	50,99338
29	13,12115	14,25645	16,04707	17,70837	19,76774	23,56659	28,33613	33,71091	39,08747	42,55697	45,72229	49,58788	52,33562
30	13,78672	14,95346	16,79077	18,49266	20,59923	24,47761	29,33603	34,79974	40,25602	43,77297	46,97924	50,89218	53,67196

Приложение 4

Уровни значимости критерия F в зависимости от df

F/df	0,01	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	20	30
1	0,937	0,608	0,500	0,436	0,392	0,359	0,333	0,313	0,295	0,280	0,268	0,257	0,247	0,238	0,230	0,223	0,216	0,210	0,205	0,200	0,195	0,140	0,115
2	0,929	0,553	0,423	0,345	0,293	0,255	0,225	0,202	0,184	0,168	0,155	0,144	0,134	0,126	0,118	0,111	0,106	0,100	0,095	0,091	0,087	0,047	0,032
3	0,927	0,530	0,391	0,308	0,252	0,212	0,182	0,158	0,139	0,124	0,111	0,101	0,092	0,084	0,077	0,071	0,066	0,062	0,058	0,054	0,051	0,021	0,012
4	0,925	0,519	0,374	0,288	0,230	0,189	0,158	0,135	0,116	0,101	0,089	0,079	0,070	0,063	0,057	0,052	0,047	0,043	0,040	0,037	0,034	0,011	0,005
5	0,924	0,511	0,363	0,275	0,216	0,175	0,144	0,120	0,102	0,087	0,076	0,066	0,058	0,051	0,046	0,041	0,037	0,033	0,030	0,027	0,025	0,007	0,003
6	0,924	0,506	0,356	0,267	0,207	0,165	0,134	0,111	0,092	0,078	0,067	0,057	0,050	0,044	0,038	0,034	0,030	0,027	0,024	0,022	0,020	0,004	0,002
7	0,923	0,502	0,351	0,260	0,200	0,158	0,127	0,104	0,086	0,072	0,060	0,051	0,044	0,038	0,033	0,029	0,025	0,022	0,020	0,018	0,016	0,003	0,001
8	0,923	0,500	0,347	0,256	0,195	0,153	0,122	0,098	0,081	0,067	0,056	0,047	0,040	0,034	0,029	0,026	0,022	0,019	0,017	0,015	0,013	0,002	0,001
9	0,923	0,497	0,343	0,252	0,191	0,148	0,117	0,094	0,077	0,063	0,052	0,044	0,037	0,031	0,027	0,023	0,020	0,017	0,015	0,013	0,012	0,002	0,000
10	0,922	0,496	0,341	0,249	0,188	0,145	0,114	0,091	0,073	0,060	0,049	0,041	0,034	0,029	0,024	0,021	0,018	0,015	0,013	0,012	0,010	0,001	0,000
11	0,922	0,494	0,339	0,246	0,185	0,142	0,111	0,088	0,071	0,057	0,047	0,039	0,032	0,027	0,023	0,019	0,016	0,014	0,012	0,010	0,009	0,001	0,000
12	0,922	0,493	0,337	0,244	0,183	0,140	0,109	0,086	0,069	0,055	0,045	0,037	0,031	0,025	0,021	0,018	0,015	0,013	0,011	0,009	0,008	0,001	0,000
13	0,922	0,492	0,336	0,242	0,181	0,138	0,107	0,084	0,067	0,054	0,044	0,036	0,029	0,024	0,020	0,017	0,014	0,012	0,010	0,009	0,007	0,001	0,000
14	0,922	0,491	0,334	0,241	0,179	0,136	0,105	0,082	0,065	0,052	0,042	0,034	0,028	0,023	0,019	0,016	0,013	0,011	0,010	0,008	0,007	0,001	0,000
15	0,922	0,490	0,333	0,240	0,178	0,135	0,104	0,081	0,064	0,051	0,041	0,033	0,027	0,022	0,018	0,015	0,013	0,011	0,009	0,008	0,006	0,000	0,000
16	0,922	0,490	0,332	0,238	0,176	0,133	0,102	0,080	0,063	0,050	0,040	0,032	0,026	0,021	0,018	0,015	0,012	0,010	0,008	0,007	0,006	0,000	0,000
17	0,922	0,489	0,331	0,237	0,175	0,132	0,101	0,079	0,062	0,049	0,039	0,031	0,025	0,021	0,017	0,014	0,012	0,010	0,008	0,007	0,006	0,000	0,000
18	0,921	0,489	0,331	0,236	0,174	0,131	0,100	0,078	0,061	0,048	0,038	0,031	0,025	0,020	0,016	0,013	0,011	0,009	0,008	0,006	0,005	0,000	0,000
19	0,921	0,488	0,330	0,236	0,173	0,130	0,099	0,077	0,060	0,047	0,038	0,030	0,024	0,020	0,016	0,013	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,000	0,000
20	0,921	0,488	0,329	0,235	0,173	0,130	0,099	0,076	0,059	0,047	0,037	0,029	0,024	0,019	0,016	0,013	0,010	0,009	0,007	0,006	0,005	0,000	0,000
21	0,921	0,487	0,329	0,234	0,172	0,129	0,098	0,075	0,059	0,046	0,036	0,029	0,023	0,019	0,015	0,012	0,010	0,008	0,007	0,006	0,005	0,000	0,000
22	0,921	0,487	0,328	0,234	0,171	0,128	0,097	0,075	0,058	0,045	0,036	0,028	0,023	0,018	0,015	0,012	0,010	0,008	0,007	0,005	0,005	0,000	0,000
23	0,921	0,487	0,328	0,233	0,171	0,128	0,097	0,074	0,057	0,045	0,035	0,028	0,022	0,018	0,014	0,012	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,000	0,000
24	0,921	0,486	0,327	0,233	0,170	0,127	0,096	0,074	0,057	0,044	0,035	0,028	0,022	0,018	0,014	0,011	0,009	0,008	0,006	0,005	0,004	0,000	0,000
25	0,921	0,486	0,327	0,232	0,170	0,126	0,096	0,073	0,056	0,044	0,035	0,027	0,022	0,017	0,014	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,000	0,000
26	0,921	0,486	0,327	0,232	0,169	0,126	0,095	0,073	0,056	0,044	0,034	0,027	0,021	0,017	0,014	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,000	0,000
27	0,921	0,486	0,326	0,231	0,169	0,125	0,095	0,072	0,056	0,043	0,034	0,027	0,021	0,017	0,013	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,000	0,000
28	0,921	0,485	0,326	0,231	0,168	0,125	0,094	0,072	0,055	0,043	0,033	0,026	0,021	0,017	0,013	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,000	0,000
29	0,921	0,485	0,326	0,231	0,168	0,125	0,094	0,071	0,055	0,043	0,033	0,026	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,007	0,005	0,004	0,004	0,000	0,000

30	0,921	0,485	0,325	0,230	0,168	0,124	0,094	0,071	0,055	0,042	0,033	0,026	0,020	0,016	0,013	0,010	0,008	0,007	0,005	0,004	0,004	0,000	0,000
31	0,921	0,485	0,325	0,230	0,167	0,124	0,093	0,071	0,054	0,042	0,033	0,026	0,020	0,016	0,013	0,010	0,008	0,007	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
32	0,921	0,485	0,325	0,230	0,167	0,124	0,093	0,071	0,054	0,042	0,032	0,025	0,020	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
33	0,921	0,484	0,325	0,229	0,167	0,123	0,093	0,070	0,054	0,041	0,032	0,025	0,020	0,016	0,012	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
34	0,921	0,484	0,324	0,229	0,166	0,123	0,092	0,070	0,054	0,041	0,032	0,025	0,020	0,015	0,012	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
35	0,921	0,484	0,324	0,229	0,166	0,123	0,092	0,070	0,053	0,041	0,032	0,025	0,019	0,015	0,012	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
36	0,921	0,484	0,324	0,229	0,166	0,123	0,092	0,070	0,053	0,041	0,032	0,025	0,019	0,015	0,012	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
37	0,921	0,484	0,324	0,228	0,166	0,122	0,092	0,069	0,053	0,041	0,031	0,024	0,019	0,015	0,012	0,009	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
38	0,921	0,484	0,324	0,228	0,165	0,122	0,091	0,069	0,053	0,040	0,031	0,024	0,019	0,015	0,012	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
39	0,921	0,484	0,323	0,228	0,165	0,122	0,091	0,069	0,052	0,040	0,031	0,024	0,019	0,015	0,012	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
40	0,921	0,484	0,323	0,228	0,165	0,122	0,091	0,069	0,052	0,040	0,031	0,024	0,019	0,015	0,012	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
41	0,921	0,483	0,323	0,228	0,165	0,122	0,091	0,069	0,052	0,040	0,031	0,024	0,019	0,015	0,012	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
42	0,921	0,483	0,323	0,227	0,165	0,121	0,091	0,068	0,052	0,040	0,031	0,024	0,019	0,015	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,000	0,000
43	0,921	0,483	0,323	0,227	0,164	0,121	0,090	0,068	0,052	0,040	0,031	0,024	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,006	0,004	0,004	0,003	0,000	0,000
44	0,921	0,483	0,323	0,227	0,164	0,121	0,090	0,068	0,052	0,040	0,030	0,024	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,006	0,004	0,004	0,003	0,000	0,000
45	0,921	0,483	0,323	0,227	0,164	0,121	0,090	0,068	0,052	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,006	0,004	0,004	0,003	0,000	0,000
46	0,921	0,483	0,323	0,227	0,164	0,121	0,090	0,068	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
47	0,921	0,483	0,322	0,227	0,164	0,121	0,090	0,068	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
48	0,921	0,483	0,322	0,227	0,164	0,120	0,090	0,067	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
49	0,921	0,483	0,322	0,227	0,164	0,120	0,090	0,067	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
50	0,921	0,483	0,322	0,226	0,163	0,120	0,089	0,067	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
51	0,921	0,483	0,322	0,226	0,163	0,120	0,089	0,067	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,008	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
52	0,921	0,483	0,322	0,226	0,163	0,120	0,089	0,067	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,008	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
53	0,921	0,483	0,322	0,226	0,163	0,120	0,089	0,067	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,008	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
54	0,921	0,483	0,322	0,226	0,163	0,120	0,089	0,067	0,051	0,039	0,030	0,023	0,018	0,014	0,011	0,008	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
55	0,921	0,482	0,322	0,226	0,163	0,120	0,089	0,067	0,050	0,038	0,029	0,023	0,018	0,014	0,011	0,008	0,007	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
56	0,921	0,482	0,322	0,226	0,163	0,119	0,089	0,067	0,050	0,038	0,029	0,023	0,017	0,014	0,011	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
57	0,921	0,482	0,322	0,226	0,163	0,119	0,089	0,067	0,050	0,038	0,029	0,023	0,017	0,014	0,011	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,003	0,000	0,000
58	0,921	0,482	0,321	0,226	0,163	0,119	0,089	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
59	0,921	0,482	0,321	0,226	0,163	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
60	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
61	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
62	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000

63	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
64	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
65	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
66	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
67	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,119	0,088	0,066	0,050	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
68	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,118	0,088	0,066	0,049	0,038	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
69	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,118	0,088	0,066	0,049	0,037	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
70	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,118	0,088	0,066	0,049	0,037	0,029	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
71	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,118	0,088	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
72	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,118	0,088	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
73	0,921	0,482	0,321	0,225	0,162	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
74	0,921	0,482	0,321	0,225	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
75	0,921	0,482	0,321	0,225	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
76	0,921	0,482	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
77	0,921	0,482	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
78	0,921	0,482	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
79	0,921	0,482	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
80	0,921	0,482	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
81	0,921	0,482	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
82	0,921	0,482	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
83	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
84	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
85	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
86	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,118	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
87	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
88	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,013	0,010	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
89	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,004	0,003	0,002	0,000	0,000
90	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,065	0,049	0,037	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
91	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,065	0,048	0,037	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
92	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,065	0,048	0,037	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
93	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,065	0,048	0,037	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
94	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,064	0,048	0,037	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
95	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,087	0,064	0,048	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000

96	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,086	0,064	0,048	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
97	0,921	0,481	0,320	0,224	0,161	0,117	0,086	0,064	0,048	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012	0,010	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
98	0,921	0,481	0,320	0,224	0,160	0,117	0,086	0,064	0,048	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012	0,009	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
99	0,921	0,481	0,320	0,224	0,160	0,117	0,086	0,064	0,048	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012	0,009	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
100	0,921	0,481	0,320	0,224	0,160	0,117	0,086	0,064	0,048	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012	0,009	0,007	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002	0,000	0,000
200	0,920	0,480	0,319	0,222	0,159	0,115	0,085	0,063	0,047	0,035	0,026	0,020	0,015	0,012	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003	0,002	0,002	0,000	0,000
300	0,920	0,480	0,318	0,222	0,158	0,115	0,084	0,062	0,046	0,035	0,026	0,020	0,015	0,011	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003	0,002	0,002	0,000	0,000
400	0,920	0,480	0,318	0,221	0,158	0,115	0,084	0,062	0,046	0,035	0,026	0,020	0,015	0,011	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,002	0,000	0,000
500	0,920	0,480	0,318	0,221	0,158	0,114	0,084	0,062	0,046	0,034	0,026	0,019	0,015	0,011	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,002	0,000	0,000

Значения углов фи в радианах

p, частота	***Последний десятичный знак частоты***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0,00000	0,00632	0,00894	0,01095	0,01265	0,01414	0,01549	0,01673	0,01789	0,01897
0,0001	0,02000	0,02098	0,02191	0,02280	0,02366	0,02450	0,02530	0,02608	0,02683	0,02757
0,0002	0,02829	0,02898	0,02967	0,03033	0,03099	0,03162	0,03225	0,03286	0,03347	0,03406
0,0003	0,03464	0,03522	0,03578	0,03633	0,03688	0,03742	0,03795	0,03847	0,03899	0,03950
0,0004	0,04000	0,04050	0,04099	0,04148	0,04196	0,04243	0,04290	0,04336	0,04382	0,04428
0,0005	0,04473	0,04517	0,04561	0,04605	0,04648	0,04691	0,04733	0,04775	0,04817	0,04858
0,0006	0,04899	0,04940	0,04980	0,05020	0,05060	0,05100	0,05139	0,05177	0,05216	0,05254
0,0007	0,05292	0,05330	0,05367	0,05404	0,05441	0,05478	0,05514	0,05550	0,05586	0,05622
0,0008	0,05658	0,05693	0,05728	0,05763	0,05797	0,05832	0,05866	0,05900	0,05934	0,05967
0,0009	0,06001	0,06034	0,06067	0,06100	0,06133	0,06165	0,06198	0,06230	0,06262	0,06294
0,001	0,06326	0,06634	0,06930	0,07213	0,07485	0,07748	0,08002	0,08249	0,08488	0,08721
0,0011	0,06634	0,06930	0,07213	0,07485	0,07748	0,08002	0,08249	0,08488	0,08721	0,08947
0,0012	0,06930	0,07213	0,07485	0,07748	0,08002	0,08249	0,08488	0,08721	0,08947	0,09168
0,0013	0,07213	0,07485	0,07748	0,08002	0,08249	0,08488	0,08721	0,08947	0,09168	0,09384
0,0014	0,07485	0,07748	0,08002	0,08249	0,08488	0,08721	0,08947	0,09168	0,09384	0,09595
0,0015	0,07748	0,08002	0,08249	0,08488	0,08721	0,08947	0,09168	0,09384	0,09595	0,09802
0,0016	0,08002	0,08249	0,08488	0,08721	0,08947	0,09168	0,09384	0,09595	0,09802	0,10004
0,0017	0,08249	0,08488	0,08721	0,08947	0,09168	0,09384	0,09595	0,09802	0,10004	0,10202
0,0018	0,08488	0,08721	0,08947	0,09168	0,09384	0,09595	0,09802	0,10004	0,10202	0,10397
0,0019	0,08721	0,08947	0,09168	0,09384	0,09595	0,09802	0,10004	0,10202	0,10397	0,10588
0,002	0,08947	0,09168	0,09384	0,09595	0,09802	0,10004	0,10202	0,10397	0,10588	0,10776

p, *частота*	*Последний десятичный знак частоты*									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0021	0,09168	0,09384	0,09595	0,09802	0,10004	0,10202	0,10397	0,10588	0,10776	0,10960
0,0022	0,09384	0,09595	0,09802	0,10004	0,10202	0,10397	0,10588	0,10776	0,10960	0,11141
0,0023	0,09595	0,09802	0,10004	0,10202	0,10397	0,10588	0,10776	0,10960	0,11141	0,11320
0,0024	0,09802	0,10004	0,10202	0,10397	0,10588	0,10776	0,10960	0,11141	0,11320	0,11495
0,0025	0,10004	0,10202	0,10397	0,10588	0,10776	0,10960	0,11141	0,11320	0,11495	0,11669
0,0026	0,10202	0,10397	0,10588	0,10776	0,10960	0,11141	0,11320	0,11495	0,11669	0,11839
0,0027	0,10397	0,10588	0,10776	0,10960	0,11141	0,11320	0,11495	0,11669	0,11839	0,12007
0,0028	0,10588	0,10776	0,10960	0,11141	0,11320	0,11495	0,11669	0,11839	0,12007	0,12173
0,0029	0,10776	0,10960	0,11141	0,11320	0,11495	0,11669	0,11839	0,12007	0,12173	0,12337
0,003	0,10960	0,11141	0,11320	0,11495	0,11669	0,11839	0,12007	0,12173	0,12337	0,12498
0,0031	0,11141	0,11320	0,11495	0,11669	0,11839	0,12007	0,12173	0,12337	0,12498	0,12658
0,0032	0,11320	0,11495	0,11669	0,11839	0,12007	0,12173	0,12337	0,12498	0,12658	0,12815
0,0033	0,11495	0,11669	0,11839	0,12007	0,12173	0,12337	0,12498	0,12658	0,12815	0,12971
0,0034	0,11669	0,11839	0,12007	0,12173	0,12337	0,12498	0,12658	0,12815	0,12971	0,13124
0,0035	0,11839	0,12007	0,12173	0,12337	0,12498	0,12658	0,12815	0,12971	0,13124	0,13276
0,0036	0,12007	0,12173	0,12337	0,12498	0,12658	0,12815	0,12971	0,13124	0,13276	0,13426
0,0037	0,12173	0,12337	0,12498	0,12658	0,12815	0,12971	0,13124	0,13276	0,13426	0,13575
0,0038	0,12337	0,12498	0,12658	0,12815	0,12971	0,13124	0,13276	0,13426	0,13575	0,13722
0,0039	0,12498	0,12658	0,12815	0,12971	0,13124	0,13276	0,13426	0,13575	0,13722	0,13868
0,004	0,12658	0,12815	0,12971	0,13124	0,13276	0,13426	0,13575	0,13722	0,13868	0,14011
0,0041	0,12815	0,12971	0,13124	0,13276	0,13426	0,13575	0,13722	0,13868	0,14011	0,14154
0,0042	0,12971	0,13124	0,13276	0,13426	0,13575	0,13722	0,13868	0,14011	0,14154	0,14295
0,0043	0,13124	0,13276	0,13426	0,13575	0,13722	0,13868	0,14011	0,14154	0,14295	0,14435

p, частота	***Последний десятичный знак частоты***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0044	0,13276	0,13426	0,13575	0,13722	0,13868	0,14011	0,14154	0,14295	0,14435	0,14573
0,0045	0,13426	0,13575	0,13722	0,13868	0,14011	0,14154	0,14295	0,14435	0,14573	0,14710
0,0046	0,13575	0,13722	0,13868	0,14011	0,14154	0,14295	0,14435	0,14573	0,14710	0,14846
0,0047	0,13722	0,13868	0,14011	0,14154	0,14295	0,14435	0,14573	0,14710	0,14846	0,14981
0,0048	0,13868	0,14011	0,14154	0,14295	0,14435	0,14573	0,14710	0,14846	0,14981	0,15114
0,0049	0,14011	0,14154	0,14295	0,14435	0,14573	0,14710	0,14846	0,14981	0,15114	0,15246
0,005	0,14154	0,14295	0,14435	0,14573	0,14710	0,14846	0,14981	0,15114	0,15246	0,15377
0,0051	0,14295	0,14435	0,14573	0,14710	0,14846	0,14981	0,15114	0,15246	0,15377	0,15507
0,0052	0,14435	0,14573	0,14710	0,14846	0,14981	0,15114	0,15246	0,15377	0,15507	0,15636
0,0053	0,14573	0,14710	0,14846	0,14981	0,15114	0,15246	0,15377	0,15507	0,15636	0,15764
0,0054	0,14710	0,14846	0,14981	0,15114	0,15246	0,15377	0,15507	0,15636	0,15764	0,15891
0,0055	0,14846	0,14981	0,15114	0,15246	0,15377	0,15507	0,15636	0,15764	0,15891	0,16017
0,0056	0,14981	0,15114	0,15246	0,15377	0,15507	0,15636	0,15764	0,15891	0,16017	0,16142
0,0057	0,15114	0,15246	0,15377	0,15507	0,15636	0,15764	0,15891	0,16017	0,16142	0,16266
0,0058	0,15246	0,15377	0,15507	0,15636	0,15764	0,15891	0,16017	0,16142	0,16266	0,16389
0,0059	0,15377	0,15507	0,15636	0,15764	0,15891	0,16017	0,16142	0,16266	0,16389	0,16511
0,006	0,15507	0,15636	0,15764	0,15891	0,16017	0,16142	0,16266	0,16389	0,16511	0,16632
0,0061	0,15636	0,15764	0,15891	0,16017	0,16142	0,16266	0,16389	0,16511	0,16632	0,16753
0,0062	0,15764	0,15891	0,16017	0,16142	0,16266	0,16389	0,16511	0,16632	0,16753	0,16872
0,0063	0,15891	0,16017	0,16142	0,16266	0,16389	0,16511	0,16632	0,16753	0,16872	0,16991
0,0064	0,16017	0,16142	0,16266	0,16389	0,16511	0,16632	0,16753	0,16872	0,16991	0,17109
0,0065	0,16142	0,16266	0,16389	0,16511	0,16632	0,16753	0,16872	0,16991	0,17109	0,17226
0,0066	0,16266	0,16389	0,16511	0,16632	0,16753	0,16872	0,16991	0,17109	0,17226	0,17342

p, *частота*	*Последний десятичный знак частоты*									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0067	0,16389	0,16511	0,16632	0,16753	0,16872	0,16991	0,17109	0,17226	0,17342	0,17458
0,0068	0,16511	0,16632	0,16753	0,16872	0,16991	0,17109	0,17226	0,17342	0,17458	0,17573
0,0069	0,16632	0,16753	0,16872	0,16991	0,17109	0,17226	0,17342	0,17458	0,17573	0,17687
0,007	0,16753	0,16872	0,16991	0,17109	0,17226	0,17342	0,17458	0,17573	0,17687	0,17800
0,0071	0,16872	0,16991	0,17109	0,17226	0,17342	0,17458	0,17573	0,17687	0,17800	0,17912
0,0072	0,16991	0,17109	0,17226	0,17342	0,17458	0,17573	0,17687	0,17800	0,17912	0,18024
0,0073	0,17109	0,17226	0,17342	0,17458	0,17573	0,17687	0,17800	0,17912	0,18024	0,18136
0,0074	0,17226	0,17342	0,17458	0,17573	0,17687	0,17800	0,17912	0,18024	0,18136	0,18246
0,0075	0,17342	0,17458	0,17573	0,17687	0,17800	0,17912	0,18024	0,18136	0,18246	0,18356
0,0076	0,17458	0,17573	0,17687	0,17800	0,17912	0,18024	0,18136	0,18246	0,18356	0,18465
0,0077	0,17573	0,17687	0,17800	0,17912	0,18024	0,18136	0,18246	0,18356	0,18465	0,18574
0,0078	0,17687	0,17800	0,17912	0,18024	0,18136	0,18246	0,18356	0,18465	0,18574	0,18682
0,0079	0,17800	0,17912	0,18024	0,18136	0,18246	0,18356	0,18465	0,18574	0,18682	0,18789
0,008	0,17912	0,18024	0,18136	0,18246	0,18356	0,18465	0,18574	0,18682	0,18789	0,18896
0,0081	0,18024	0,18136	0,18246	0,18356	0,18465	0,18574	0,18682	0,18789	0,18896	0,19002
0,0082	0,18136	0,18246	0,18356	0,18465	0,18574	0,18682	0,18789	0,18896	0,19002	0,19108
0,0083	0,18246	0,18356	0,18465	0,18574	0,18682	0,18789	0,18896	0,19002	0,19108	0,19213
0,0084	0,18356	0,18465	0,18574	0,18682	0,18789	0,18896	0,19002	0,19108	0,19213	0,19317
0,0085	0,18465	0,18574	0,18682	0,18789	0,18896	0,19002	0,19108	0,19213	0,19317	0,19421
0,0086	0,18574	0,18682	0,18789	0,18896	0,19002	0,19108	0,19213	0,19317	0,19421	0,19525
0,0087	0,18682	0,18789	0,18896	0,19002	0,19108	0,19213	0,19317	0,19421	0,19525	0,19627
0,0088	0,18789	0,18896	0,19002	0,19108	0,19213	0,19317	0,19421	0,19525	0,19627	0,19730
0,0089	0,18896	0,19002	0,19108	0,19213	0,19317	0,19421	0,19525	0,19627	0,19730	0,19831

***p*, частота**	***Последний десятичный знак частоты***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,009	0,19002	0,19108	0,19213	0,19317	0,19421	0,19525	0,19627	0,19730	0,19831	0,19933
0,0091	0,19108	0,19213	0,19317	0,19421	0,19525	0,19627	0,19730	0,19831	0,19933	0,20033
0,0092	0,19213	0,19317	0,19421	0,19525	0,19627	0,19730	0,19831	0,19933	0,20033	0,20134
0,0093	0,19317	0,19421	0,19525	0,19627	0,19730	0,19831	0,19933	0,20033	0,20134	0,20234
0,0094	0,19421	0,19525	0,19627	0,19730	0,19831	0,19933	0,20033	0,20134	0,20234	0,20333
0,0095	0,19525	0,19627	0,19730	0,19831	0,19933	0,20033	0,20134	0,20234	0,20333	0,20432
0,0096	0,19627	0,19730	0,19831	0,19933	0,20033	0,20134	0,20234	0,20333	0,20432	0,20530
0,0097	0,19730	0,19831	0,19933	0,20033	0,20134	0,20234	0,20333	0,20432	0,20530	0,20628
0,0098	0,19831	0,19933	0,20033	0,20134	0,20234	0,20333	0,20432	0,20530	0,20628	0,20725
0,0099	0,19933	0,20033	0,20134	0,20234	0,20333	0,20432	0,20530	0,20628	0,20725	0,20822
0,01	0,20033	0,21015	0,21953	0,22853	0,23720	0,24557	0,25366	0,26151	0,26914	0,27656
0,02	0,28379	0,29085	0,29775	0,30449	0,31109	0,31756	0,32390	0,33013	0,33625	0,34226
0,03	0,34817	0,35398	0,35971	0,36535	0,37090	0,37638	0,38179	0,38712	0,39238	0,39758
0,04	0,40272	0,40779	0,41280	0,41776	0,42266	0,42751	0,43231	0,43706	0,44176	0,44642
0,05	0,45103	0,45559	0,46012	0,46460	0,46905	0,47345	0,47782	0,48215	0,48645	0,49071
0,06	0,49493	0,49913	0,50329	0,50742	0,51152	0,51559	0,51964	0,52365	0,52764	0,53159
0,07	0,53553	0,53943	0,54331	0,54717	0,55100	0,55481	0,55860	0,56236	0,56610	0,56982
0,08	0,57351	0,57719	0,58084	0,58448	0,58809	0,59169	0,59526	0,59882	0,60236	0,60588
0,09	0,60939	0,61287	0,61634	0,61979	0,62323	0,62664	0,63005	0,63343	0,63680	0,64016
0,1	0,64350	0,64683	0,65014	0,65344	0,65672	0,65999	0,66324	0,66648	0,66971	0,67293
0,11	0,67613	0,67932	0,68250	0,68566	0,68881	0,69196	0,69508	0,69820	0,70131	0,70440
0,12	0,70748	0,71055	0,71362	0,71667	0,71971	0,72273	0,72575	0,72876	0,73176	0,73475
0,13	0,73773	0,74069	0,74365	0,74660	0,74954	0,75247	0,75540	0,75831	0,76121	0,76411

p, частота	***Последний десятичный знак частоты***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,14	0,76699	0,76987	0,77274	0,77560	0,77845	0,78130	0,78413	0,78696	0,78978	0,79259
0,15	0,79540	0,79820	0,80098	0,80377	0,80654	0,80931	0,81207	0,81482	0,81756	0,82030
0,16	0,82303	0,82576	0,82848	0,83119	0,83389	0,83659	0,83928	0,84196	0,84464	0,84731
0,17	0,84998	0,85264	0,85529	0,85794	0,86058	0,86321	0,86584	0,86846	0,87108	0,87369
0,18	0,87630	0,87890	0,88149	0,88408	0,88667	0,88924	0,89182	0,89438	0,89695	0,89950
0,19	0,90205	0,90460	0,90714	0,90968	0,91221	0,91474	0,91726	0,91977	0,92229	0,92479
0,2	0,92730	0,92979	0,93229	0,93477	0,93726	0,93974	0,94221	0,94468	0,94715	0,94961
0,21	0,95207	0,95452	0,95697	0,95941	0,96185	0,96429	0,96672	0,96915	0,97157	0,97399
0,22	0,97641	0,97882	0,98123	0,98364	0,98604	0,98843	0,99082	0,99321	0,99560	0,99798
0,23	1,00036	1,00273	1,00510	1,00747	1,00984	1,01220	1,01455	1,01691	1,01926	1,02160
0,24	1,02395	1,02629	1,02862	1,03095	1,03328	1,03561	1,03794	1,04026	1,04257	1,04489
0,25	1,04720	1,04951	1,05181	1,05411	1,05641	1,05871	1,06100	1,06329	1,06558	1,06786
0,26	1,07014	1,07242	1,07470	1,07697	1,07924	1,08151	1,08377	1,08603	1,08829	1,09055
0,27	1,09280	1,09505	1,09730	1,09955	1,10179	1,10403	1,10627	1,10851	1,11074	1,11297
0,28	1,11520	1,11742	1,11965	1,12187	1,12409	1,12630	1,12852	1,13073	1,13294	1,13515
0,29	1,13735	1,13955	1,14175	1,14395	1,14615	1,14834	1,15053	1,15272	1,15491	1,15710
0,3	1,15928	1,16146	1,16364	1,16582	1,16799	1,17016	1,17234	1,17450	1,17667	1,17884
0,31	1,18100	1,18316	1,18532	1,18748	1,18963	1,19179	1,19394	1,19609	1,19824	1,20038
0,32	1,20253	1,20467	1,20681	1,20895	1,21109	1,21323	1,21536	1,21749	1,21962	1,22175
0,33	1,22388	1,22601	1,22813	1,23025	1,23237	1,23449	1,23661	1,23873	1,24084	1,24296
0,34	1,24507	1,24718	1,24929	1,25139	1,25350	1,25560	1,25771	1,25981	1,26191	1,26401
0,35	1,26610	1,26820	1,27029	1,27239	1,27448	1,27657	1,27866	1,28075	1,28283	1,28492
0,36	1,28700	1,28908	1,29117	1,29325	1,29533	1,29740	1,29948	1,30156	1,30363	1,30570

p, частота	Последний десятичный знак частоты									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,37	1,30777	1,30984	1,31191	1,31398	1,31605	1,31812	1,32018	1,32225	1,32431	1,32637
0,38	1,32843	1,33049	1,33255	1,33461	1,33666	1,33872	1,34077	1,34283	1,34488	1,34693
0,39	1,34898	1,35103	1,35308	1,35513	1,35718	1,35922	1,36127	1,36331	1,36535	1,36740
0,4	1,36944	1,37148	1,37352	1,37556	1,37760	1,37963	1,38167	1,38371	1,38574	1,38778
0,41	1,38981	1,39184	1,39387	1,39591	1,39794	1,39997	1,40200	1,40402	1,40605	1,40808
0,42	1,41011	1,41213	1,41416	1,41618	1,41820	1,42023	1,42225	1,42427	1,42629	1,42831
0,43	1,43033	1,43235	1,43437	1,43639	1,43841	1,44043	1,44244	1,44446	1,44648	1,44849
0,44	1,45051	1,45252	1,45453	1,45655	1,45856	1,46057	1,46259	1,46460	1,46661	1,46862
0,45	1,47063	1,47264	1,47465	1,47666	1,47867	1,48067	1,48268	1,48469	1,48670	1,48870
0,46	1,49071	1,49272	1,49472	1,49673	1,49873	1,50074	1,50274	1,50475	1,50675	1,50876
0,47	1,51076	1,51276	1,51477	1,51677	1,51877	1,52078	1,52278	1,52478	1,52678	1,52878
0,48	1,53079	1,53279	1,53479	1,53679	1,53879	1,54079	1,54279	1,54479	1,54679	1,54879
0,49	1,55079	1,55280	1,55480	1,55680	1,55880	1,56080	1,56280	1,56480	1,56680	1,56880
0,5	1,57080	1,57280	1,57480	1,57680	1,57880	1,58080	1,58280	1,58480	1,58680	1,58880
0,51	1,59080	1,59280	1,59480	1,59680	1,59880	1,60080	1,60280	1,60480	1,60680	1,60881
0,52	1,61081	1,61281	1,61481	1,61681	1,61881	1,62082	1,62282	1,62482	1,62683	1,62883
0,53	1,63083	1,63284	1,63484	1,63684	1,63885	1,64085	1,64286	1,64486	1,64687	1,64888
0,54	1,65088	1,65289	1,65490	1,65690	1,65891	1,66092	1,66293	1,66494	1,66694	1,66895
0,55	1,67096	1,67297	1,67498	1,67700	1,67901	1,68102	1,68303	1,68504	1,68706	1,68907
0,56	1,69109	1,69310	1,69512	1,69713	1,69915	1,70117	1,70318	1,70520	1,70722	1,70924
0,57	1,71126	1,71328	1,71530	1,71732	1,71934	1,72136	1,72339	1,72541	1,72744	1,72946
0,58	1,73149	1,73351	1,73554	1,73757	1,73960	1,74163	1,74366	1,74569	1,74772	1,74975
0,59	1,75178	1,75382	1,75585	1,75789	1,75992	1,76196	1,76400	1,76603	1,76807	1,77011

p, частота	*Последний десятичный знак частоты*									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,6	1,77215	1,77420	1,77624	1,77828	1,78033	1,78237	1,78442	1,78646	1,78851	1,79056
0,61	1,79261	1,79466	1,79671	1,79877	1,80082	1,80287	1,80493	1,80699	1,80904	1,81110
0,62	1,81316	1,81522	1,81728	1,81935	1,82141	1,82348	1,82554	1,82761	1,82968	1,83175
0,63	1,83382	1,83589	1,83796	1,84004	1,84211	1,84419	1,84627	1,84835	1,85043	1,85251
0,64	1,85459	1,85667	1,85876	1,86085	1,86293	1,86502	1,86711	1,86921	1,87130	1,87339
0,65	1,87549	1,87759	1,87968	1,88178	1,88389	1,88599	1,88809	1,89020	1,89231	1,89442
0,66	1,89653	1,89864	1,90075	1,90287	1,90498	1,90710	1,90922	1,91134	1,91346	1,91559
0,67	1,91771	1,91984	1,92197	1,92410	1,92623	1,92837	1,93050	1,93264	1,93478	1,93692
0,68	1,93906	1,94121	1,94336	1,94550	1,94765	1,94981	1,95196	1,95411	1,95627	1,95843
0,69	1,96059	1,96276	1,96492	1,96709	1,96926	1,97143	1,97360	1,97578	1,97795	1,98013
0,7	1,98231	1,98450	1,98668	1,98887	1,99106	1,99325	1,99544	1,99764	1,99984	2,00204
0,71	2,00424	2,00645	2,00865	2,01086	2,01308	2,01529	2,01751	2,01972	2,02195	2,02417
0,72	2,02640	2,02862	2,03085	2,03309	2,03532	2,03756	2,03980	2,04205	2,04429	2,04654
0,73	2,04879	2,05105	2,05330	2,05556	2,05782	2,06009	2,06235	2,06462	2,06690	2,06917
0,74	2,07145	2,07373	2,07602	2,07830	2,08059	2,08289	2,08518	2,08748	2,08978	2,09209
0,75	2,09440	2,09671	2,09902	2,10134	2,10366	2,10598	2,10831	2,11064	2,11297	2,11531
0,76	2,11765	2,11999	2,12234	2,12469	2,12704	2,12940	2,13176	2,13412	2,13649	2,13886
0,77	2,14123	2,14361	2,14599	2,14838	2,15077	2,15316	2,15556	2,15796	2,16036	2,16277
0,78	2,16518	2,16760	2,17002	2,17244	2,17487	2,17730	2,17974	2,18218	2,18462	2,18707
0,79	2,18953	2,19198	2,19444	2,19691	2,19938	2,20186	2,20433	2,20682	2,20931	2,21180
0,8	2,21430	2,21680	2,21931	2,22182	2,22434	2,22686	2,22938	2,23191	2,23445	2,23699
0,81	2,23954	2,24209	2,24465	2,24721	2,24978	2,25235	2,25493	2,25751	2,26010	2,26269
0,82	2,26529	2,26790	2,27051	2,27313	2,27575	2,27838	2,28102	2,28366	2,28630	2,28896

p, частота	Последний десятичный знак частоты									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,83	2,29162	2,29428	2,29695	2,29963	2,30231	2,30501	2,30770	2,31041	2,31312	2,31583
0,84	2,31856	2,32129	2,32403	2,32677	2,32953	2,33229	2,33505	2,33783	2,34061	2,34340
0,85	2,34619	2,34900	2,35181	2,35463	2,35746	2,36029	2,36314	2,36599	2,36885	2,37172
0,86	2,37460	2,37748	2,38038	2,38328	2,38620	2,38912	2,39205	2,39499	2,39794	2,40090
0,87	2,40387	2,40685	2,40983	2,41283	2,41584	2,41886	2,42189	2,42493	2,42798	2,43104
0,88	2,43411	2,43719	2,44029	2,44339	2,44651	2,44964	2,45278	2,45593	2,45910	2,46227
0,89	2,46546	2,46866	2,47188	2,47511	2,47835	2,48161	2,48487	2,48816	2,49145	2,49477
0,9	2,49809	2,50143	2,50479	2,50816	2,51155	2,51495	2,51837	2,52180	2,52525	2,52872
0,91	2,53221	2,53571	2,53923	2,54277	2,54633	2,54990	2,55350	2,55711	2,56075	2,56440
0,92	2,56808	2,57178	2,57549	2,57923	2,58300	2,58678	2,59059	2,59442	2,59828	2,60216
0,93	2,60607	2,61000	2,61396	2,61794	2,62196	2,62600	2,63007	2,63417	2,63830	2,64246
0,94	2,64666	2,65089	2,65515	2,65944	2,66377	2,66814	2,67255	2,67699	2,68147	2,68600
0,95	2,69057	2,69518	2,69983	2,70453	2,70928	2,71408	2,71893	2,72383	2,72879	2,73380
0,96	2,73888	2,74401	2,74921	2,75447	2,75980	2,76521	2,77069	2,77625	2,78189	2,78761
0,97	2,79343	2,79934	2,80535	2,81146	2,81769	2,82403	2,83050	2,83710	2,84385	2,85074
0,98	2,85780	2,86503	2,87245	2,88008	2,88793	2,89603	2,90439	2,91306	2,92206	2,93144
0,99	2,94126	2,95157	2,96247	2,97406	2,98652	3,00005	3,01502	3,03199	3,05212	3,07834
0,991	2,95157	2,95263	2,95370	2,95477	2,95585	2,95694	2,95803	2,95913	2,96024	2,96135
0,992	2,96247	2,96359	2,96473	2,96587	2,96702	2,96817	2,96933	2,97050	2,97168	2,97287
0,993	2,97406	2,97527	2,97648	2,97770	2,97893	2,98017	2,98142	2,98268	2,98395	2,98523
0,994	2,98652	2,98782	2,98913	2,99045	2,99179	2,99313	2,99449	2,99586	2,99725	2,99864
0,995	3,00005	3,00148	3,00292	3,00437	3,00584	3,00733	3,00883	3,01035	3,01189	3,01344
0,996	3,01502	3,01661	3,01823	3,01986	3,02152	3,02320	3,02491	3,02664	3,02840	3,03018

p, частота	***Последний десятичный знак частоты***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,997	3,03199	3,03384	3,03571	3,03762	3,03957	3,04155	3,04357	3,04564	3,04775	3,04991
0,998	3,05212	3,05439	3,05671	3,05911	3,06157	3,06411	3,06674	3,06947	3,07230	3,07525
0,999	3,07834	3,08158	3,08502	3,08867	3,09260	3,09687	3,10159	3,10695	3,11331	3,12159
0,9991	3,08158	3,08192	3,08225	3,08259	3,08293	3,08327	3,08362	3,08397	3,08431	3,08466
0,9992	3,08502	3,08537	3,08573	3,08609	3,08645	3,08681	3,08718	3,08755	3,08792	3,08829
0,9993	3,08867	3,08905	3,08943	3,08982	3,09021	3,09060	3,09099	3,09139	3,09179	3,09219
0,9994	3,09260	3,09301	3,09342	3,09384	3,09426	3,09468	3,09511	3,09555	3,09598	3,09642
0,9995	3,09687	3,09732	3,09777	3,09823	3,09869	3,09916	3,09964	3,10012	3,10060	3,10109
0,9996	3,10159	3,10209	3,10260	3,10312	3,10364	3,10417	3,10471	3,10526	3,10581	3,10638
0,9997	3,10695	3,10753	3,10812	3,10873	3,10934	3,10997	3,11061	3,11126	3,11193	3,11261
0,9998	3,11331	3,11402	3,11476	3,11552	3,11629	3,11710	3,11793	3,11879	3,11968	3,12062
0,9999	3,12159	3,12262	3,12370	3,12486	3,12610	3,12745	3,12894	3,13064	3,13265	3,13527
1	3,14159									

Оглавление

Составители

Камалдинов Евгений Варисович

Куликова Светлана Геннадьевна

Кочнева Марина Львовна

Нарожных Кирилл Николаевич

Гарт Владимир Владимирович

Петров Алексей Фёдорович

БИОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И МОДЕЛИРОВАНИЯ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ И БИОЛОГИИ

Учебное пособие

Формат 84 x 118 $^{1}/_{32}$

Объем 10,1 уч.-изд. л.