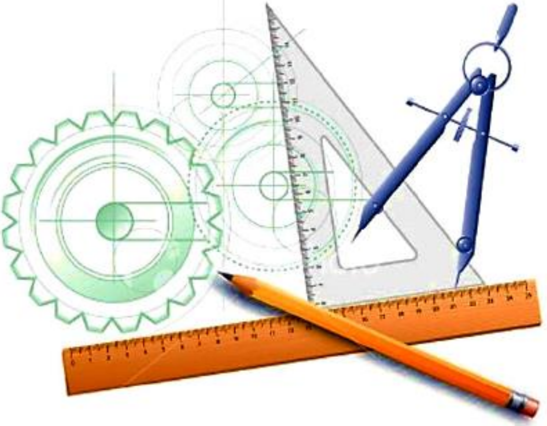
ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Инженерный институт

Т.В. Семенова, Е.В. Петрова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций



Новосибирск 2020

ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Инженерный институт

Т.В. Семенова, Е.В. Петрова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Новосибирск 2020

УДК 514.18(07)
ББК 22.15, я7
С 302

Кафедра теоретической и
прикладной механики

Авторы: *Т.В. Семенова*;
Е.В. Петрова

Семенова Т.В. Начертательная геометрия: курс лекций/ Т.В. Семенова, Е.В. Петрова; Новосиб. гос. аграр. ун-т: Инженер. ин-т; сост. Т.В. Семенова, Е.В. Петрова, Новосибирск, 2020. – 100 с. изд. пере-раб. и доп.

В методической разработке представлены теоретические основы курса в виде лекций по изучаемым темам, иллюстративный материал и примеры, необходимые при подготовке к практическим занятиям и экзамену, а также для закрепления навыков самостоятельной работы при выполнении индивидуальных заданий расчетно-графической работы.

Курс лекций предназначен для студентов очной и заочной форм обучения всех направлений подготовки Инженерного института (Агроинженерия, Технология транспортных процессов, Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, Профессиональное обучение (по отраслям).

Может быть рекомендован студентам других факультетов ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ, обучающимся по инженерным направлениям подготовки (Лесное дело, Ландшафтная архитектура, Природообустройство и водопользование, Продукты питания из растительного сырья, Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания, Стандартизация и метрология), изучающим соответствующие разделы и темы дисциплин Начертательная геометрия, Инженерная и компьютерная графика, согласно утвержденным учебным планам и рабочим программам дисциплин.

Утвержден и рекомендован к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол от 29 сентября 2020 г. № 2).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начертательная геометрия — одна из основных общетехнических дисциплин, составляющих основу инженерного образования.

Французский ученый Гаспар Монж (1746—1818), которого по праву считают творцом начертательной геометрии, так определил цели и задачи этой науки:

«Эта наука имеет две главные цели.

Первая — точное представление на чертеже, имеющем только два измерения, объектов трехмерных, которые могут быть точно заданы. С этой точки зрения — это язык, необходимый инженеру, создающему какой-либо проект, а также всем тем, кто должен руководить его осуществлением, и, наконец, мастерам, которые должны сами изготовлять различные части.

Вторая цель начертательной геометрии — выводить из точного описания тел все то, что неизбежно следует из их формы и взаимного расположения. В этом смысле — это средство искать истину; она дает бесконечные примеры перехода от неизвестного к известному; и поскольку она всегда имеет дело с предметами, которым присуща наибольшая ясность, необходимо ввести ее в план народного образования. Она пригодна не только для того, чтобы развивать интеллектуальные способности великого народа и тем самым способствовать усовершенствованию рода человеческого, но она необходима для рабочих, цель которых придавать телам определенные формы; и именно, главным образом, потому, что методы этого искусства до сих пор были мало распространены или даже совсем не пользовались вниманием, развитие промышленности шло так медленно».

Кроме этого, начертательная геометрия развивает способность абстрактно мыслить, развивает пространственные представления — качества, совершенно необходимые для инженерной практики, для решения прикладных задач.

Являясь теоретической основой инженерной графики, начертательная геометрия ставит целью:

– ознакомить изучающих ее с методами построения изображений пространственных форм на плоскости, т.е. *научить составлять чертеж;*
– развить способность мысленного воспроизведения пространственного вида изображенного на чертеже предмета, т.е. *научить читать чертеж;*
– дать знания и необходимые навыки для графического решения задач, связанных с пространственными формами, т.е. *научить графически решать задачи по начертательной геометрии.*

В процессе изучения дисциплины «Начертательная геометрия» студент должен сформировать следующие *компетенции*:

- овладеть основными законами геометрического построения и взаимного пересечения геометрических объектов в пространстве;

- готовность к решению инженерных задач, связанных с проектированием, производством и эксплуатацией машин и механизмов;

- способность применять полученные знания для изучения профильных технических дисциплин, а также в последующей инженерной деятельности.

Обозначения и символы

Обозначения геометрических фигур в различных системах			
	I	II	III
Фигура	*Ф*	*Ф*	*Ф*
Плоскости проекций горизонтальная фронтальная профильная	 H V W	 H V W	 $П_1$ $П_2$ $П_3$
Точки в пространстве	A, B, C		
Проекции точек горизонтальная фронтальная профильная	 $a, в, c$ $a', в', c'$ $a'', в'', c''$	 A', B', C' A'', B'', C'' A''', B''', C'''	 A_1, B_1, C_1 A_2, B_2, C_2 A_3, B_3, C_3
Линии	*Двумя точками*		
Проекции линий	*Проекциями точек*		
Плоскости	$P, Q, S, \alpha, \beta, \gamma$		
Следы плоскостей горизонтальные фронтальные профильные	 $P_н, Q_н, S_н$ P_V, Q_V, S_V P_W, Q_W, S_W	 $\alpha_н, \beta_н, \gamma_н$ $\alpha_V, \beta_V, \gamma_V$ $\alpha_W, \beta_W, \gamma_W$	 $\alpha_{п1}, \beta_{п1}, \gamma_{п1}$ $\alpha_{п2}, \beta_{п2}, \gamma_{п2}$ $\alpha_{п3}, \beta_{п3}, \gamma_{п3}$

Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами	
Совпадение, результат действия	$=$
Конгруэнтность	$\cong$
Перпендикулярность	$\perp$
Объединение	$\cup$
Пересечение	$\cap$
Включает	$\subset$
Принадлежит, является элементом	$\in$
Конъюкция предложений, союз И	$\wedge$
Квантор общности	$\forall$
Логическое следствие	$\Rightarrow$

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение начертательной геометрии относится к глубокой древности, появление ее обусловливалось потребностями строительства, а несколько позже — развитием искусств и техники.

С развитием методов построения изображений пространственных форм на плоскости связаны имена таких ученых древности, как Эсхил, Анаксагор, Демокрит, Евклид, Витрувий, Птолемей.

Значительных успехов в своем развитии начертательная геометрия достигла в эпоху Возрождения (Лоренцо Гиберти, Леон Баттиста Альберти, Пьеро делла Франческа, Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер и др.).

Большой вклад в развитие начертательной геометрии внесли французский математик Ж. Дезарг, итальянский архитектор Андреа дель Поццо, голландский математик Гравезандт, английский математик Тейлор, немецкий геометр Ламберт, английский геометр Вильям Фейрич, французский инженер Фрезье и ряд других.

Практические приемы построения графических изображений с давних времен были известны и в России. Есть основания считать, что графические изображения для нужд строительства применялись в России еще в X-XI вв., а несколько позже они достигли уже известного совершенства (картины художника Рублева, чертежи Петра I, Р. Санникова, И. И. Ползунова, И. П. Кулибина, И. Е. Сафонова, архитекторов Д. В. Ухтомского, В. И. Боженова, М. Ф. Казакова, В. П. Стасова и др.).

Гаспар Монж

Однако творцом начертательной геометрии по праву считается французский инженер и ученый Гаспар Монж (1746–1818). В 1795 г. Гаспар Монж опубликовал свой капитальный труд «Начертательная геометрия». В данном труде он систематизировал и обобщил накопленный годами опыт геометрических построений, систематизировал метод проекций, ввел понятие «комплексный чертёж». Именно Монжа считают основателем начертательной геометрии, так как он в данном труде дал название науке и вложил в обобщенную информацию подлинно научный смысл и значение. И эта наука, удовлетворяя требованиям технического прогресса, очень быстро завоевала признание и стала одним из основных курсов втузов.

В вузах России начертательную геометрию стали изучать с 1810 г. Первым русским профессором начертательной геометрии и крупным ученым-исследователем в этой области стал Яков Александрович Севастьянов (1796–1849).

Тема 1
ПРЕДМЕТ И МЕТОД НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ВИДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ. СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ КООРДИНАТНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ. ЭПЮР МОНЖА

Начертательная геометрия – наука о методах построения изображений пространственных форм на плоскости, излагает способы графического решения задач, связанных с телами, имеющими три измерения на плоском чертеже.

Предметы изучения начертательной геометрии:
- изложение и обоснование способов изображения пространственных форм на плоскости;
- решение пространственных задач на плоскости во всем многообразии.

Изображения, построенные по законам, изучаемым в начертательной геометрии, дают информацию о форме изображенных предметов и их взаимном расположении в пространстве, позволяют определить их размеры, исследовать геометрические свойства.

Начертательная геометрия излагает методы точного изображения пространственных предметов на плоскости и основана на *методе проекций.*

Слово *проекция* произошло от латинского слова *projecere* – бросать тень, след. Таким образом, под проекцией предмета на плоскость подразумевается его изображение, «отброшенное» на эту плоскость с помощью проецирующих лучей.

Проекцией точки *B* на плоскость *П* является точка пересечения проецирующего луча, проведенного через точку *B*, с плоскостью проекций *П* (рис.1).

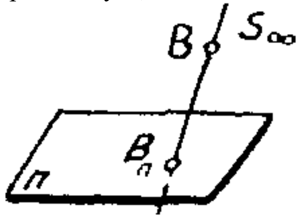
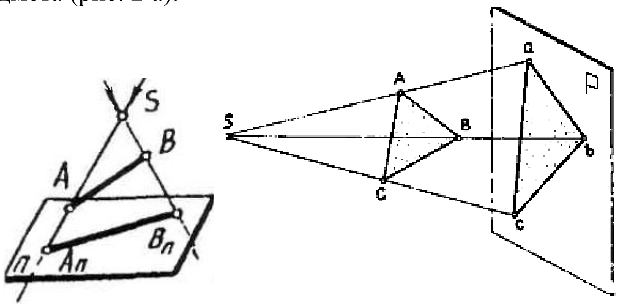


Рис. 1. Процесс проецирования

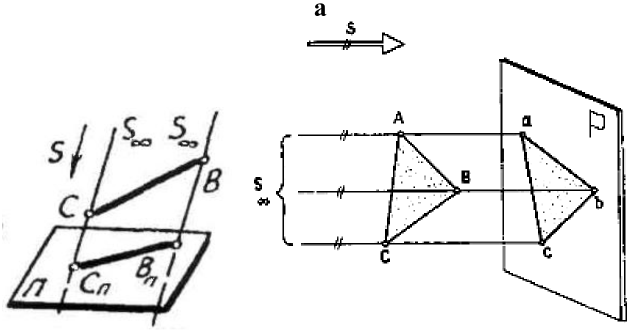
В зависимости от способа проведения проецирующих лучей проекции делятся на центральные (рис. 2 а) и параллельные (рис. 2 б).

Центральные проекции, или перспектива, обладают наилучшей наглядностью и наиболее верно передают те зрительные впечатления, которые получает наблюдатель, рассматривая предмет в натуре. Перспектива – как фотография: передает не только общую форму предмета, но и отражает взаимное положение наблюдателя и предмета – поворот и удаление предмета относительно зрителя.

Однако по перспективному изображению сложно определить истинные размеры и форму предмета (рис. 2 а).



а



б

Рис. 2. Методы проецирования: **а** – центральное; **б** – параллельное

Параллельные проекции (аксонометрия) (рис. 2 б) не отличаются такой наглядностью, как перспектива, потому что предмет рассматривается как бы издалека и только сверху или снизу. Вместе с тем аксонометрическое изображение дает представление о форме изображаемого предмета. Кроме того, по нему легко определить основные размеры предмета.

Параллельные проекции могут быть *косоугольными* (рис. 3 б) и *прямоугольными* (ортогональными) (рис. 3 а).

Если направление проецирования составляет с плоскостью проекций острый угол, то такая проекция называется косоугольной, если же прямой, то прямоугольной (ортогональной). Для построения машиностроительных чертежей применяется ортогональное проецирование.

а б

Рис. 3. Виды центрального проецирования:
а – прямоугольная (ортогональная) проекция; **б** – косоугольная

Свойства проецирования представлены на рис. 4.

1. Проекцией точки A является A_n (рис. 4 а).

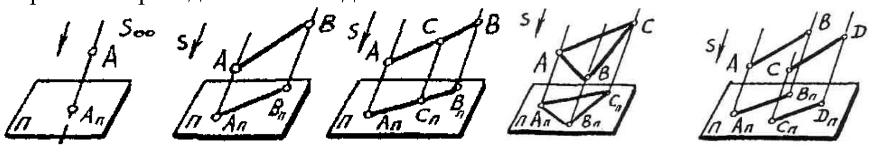
2. Проекцией прямой AB является прямая A_nB_n (рис. 4 б).

3. Если точка C принадлежит прямой AB, то проекция C_n принадлежит A_nB_n (рис. 4 в). Кроме того, отношение отрезков прямой линии равно отношению их проекций.

4. Проекции двух параллельных прямых параллельны ($AB \parallel CD$ и $A_nB_n \parallel C_nD_n$) (рис. 4 г).

5. Проекцией плоской фигуры является плоская фигура (рис. 4 д).

6. Проекции параллельных прямых параллельны между собой (рис. 4 е), но обратное справедливо не всегда.



а **б** **с** **д** **е**

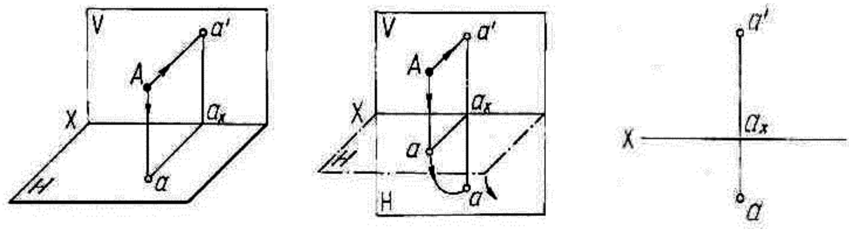
Рис. 4. Свойства параллельного проецирования

Проекция точки, линии или фигуры на одну плоскость проекций не определяет ее положения в пространстве. Положение в пространстве любого геометрического элемента или фигуры будет полностью определено проекциями его на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

К проекционным изображениям в начертательной геометрии предъявляются следующие основные требования:

- обратимость — восстановление оригинала по его проекционным изображениям (чертежу), возможность определять форму и размеры объекта, его положение и связь с окружающей средой;
- наглядность — изображение (перспектива, аксонометрия) должно создавать пространственное представление о форме предмета и о том, как будет выглядеть предмет в реальных условиях;
- точность — графические операции, выполненные на чертеже, должны давать достаточно точные результаты;
- простота — изображение должно быть простым по построению и должно допускать однозначное описание объекта в виде последовательности графических операций.

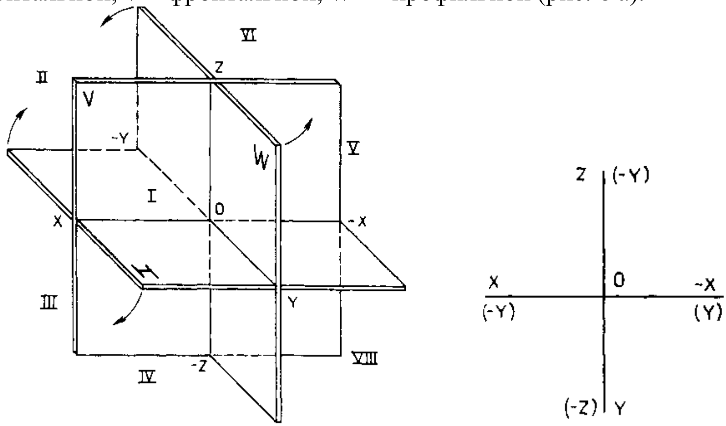
Параллельные прямоугольные проекции на две взаимно перпендикулярные неподвижные плоскости проекций — основной метод составления технических чертежей. Этот метод впервые был описан Гаспаром Монжем в 1798 г. и называется методом Монжа (рис.5 а).



а **б** **в**

Рис. 5. Эпюр точки A в системе V/H

Условие обратимости чертежа выполняется ортогональным проецированием объекта на две или три плоскости проекций. Плоскости проекций называют: H – горизонтальной, V – фронтальной, W — профильной (рис. 6 а).



а **б**

Рис. 6. Сущность метода ортогонального проецирования**:**
а – модель октантов; **б** - эпюр

Плоскости проекций разделяют пространство на восемь трехгранных углов, называемых октантами, которые нумеруют в порядке, указанном на рис.6 а. Линии пересечения плоскостей проекций называют осями проекций, или координатными осями, и обозначают: X – ось абсцисс, Y – ординат, Z – аппликат. Плоскости проекций условно приняты ограниченными и непрозрачными, после совмещения их границы не показывают (рис. 6 б).

Изображение, полученное в результате поворота плоскости проекций H на угол 90^0 до совмещения с плоскостью проекций V, называется эпюром (в переводе с французского – «чертеж») (рис. 5 б). На рис. 5 в представлен метод Монжа на примере построения эпюра точки A на две взаимно перпендикулярные неподвижные плоскости проекций V и H, где a – горизонтальная проекция точки A, a' – фронтальная проекция точки A.

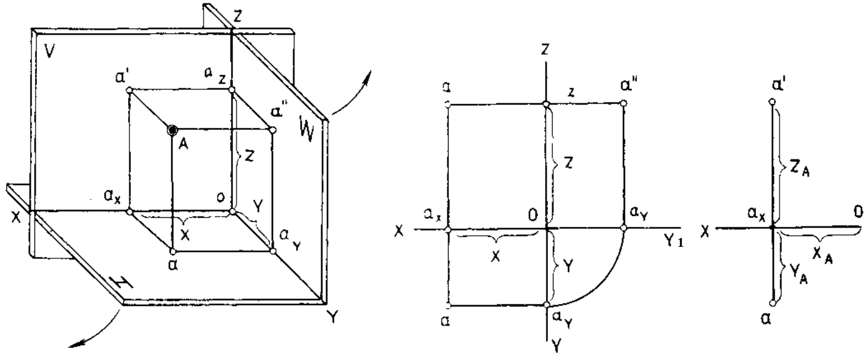
Тема 2
ЧЕРТЕЖИ ТОЧЕК. ЧЕРТЕЖИ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ. СЛЕДЫ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Ортогональной проекцией точки на плоскости проекций называют основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.

На рис. 7 а система *V/H* дополнена третьей плоскостью проекций *W,* перпендикулярной как к плоскости проекций *V,* так и к плоскости проекций *H.* Это система *V, H, W.*

На рис. 7 а показано построение проекций точки *A* в системе *V, H, W,* т. е. на три плоскости проекций; *a″* — профильная проекция точки *A.*

Совместив плоскости проекций *H* и *W* с плоскостью проекций *V* поворотом каждой из них на 90° в направлении, указанном стрелками, получим эпюр точки *A* в системе *V, H, W* (рис. 7 б).



а **б** **в**

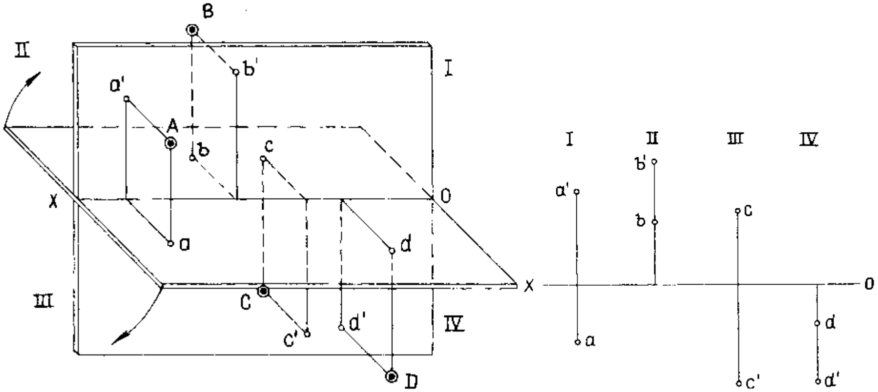
Рис. 7. Модель и эпюр точки *A* в системе *V, H, W*

Появление на эпюре оси Y_1 объясняется тем, что ось *Y* при совмещении плоскостей проекций *H* и *W* с плоскостью *V* как бы раздвоилась — одна ее часть ушла вниз с плоскостью *H* (на эпюре она обозначена буквой *Y*), а вторая — вправо с плоскостью *W* (на эпюре она обозначена буквой Y_1).

На эпюре фронтальная и профильная проекции точки лежат на одной линии связи, которая перпендикулярна к оси проекций *Z*, причем профильная проекция точки находится на таком же расстоянии от оси *Z*, как и горизонтальная от оси *X*.

Прямые линии, соединяющие проекции точки и перпендикулярные осям проекций, называют линиями связи (рис. 7 б, в).

Поскольку две проекции точки определяют ее положение в пространстве, то по двум проекциям можно построить третью, которая оказывается необходимой в тех случаях, когда проекционный чертеж объекта сложен и требуются дополнительные данные для прочтения формы объекта.



а **б**

Рис. 8. Положение проекций точек в зависимости от четверти пространства, в которой расположены точки

Если профильная плоскость проекций *W* не используется, плоскости *H* и *V* разделяют пространство на четыре двугранных угла — четверти (рис. 8 а). Ось проекций разделяет плоскости проекций на две полуплоскости.

Положение проекций точек на эпюре (рис. 8 б) зависит от того, в какой четверти пространства расположена точка. Точка *B* расположена во второй четверти, ее проекции на эпюре находятся над осью *X*. Горизонтальная проекция точки *C,* расположенной в третьей четверти, после совмещения плоскостей окажется над осью, а фронтальная проекция — ниже оси. Обе проекции точки *D,* расположенной в четвертой четверти, находятся ниже оси *X*. Две проекции точки могут совпадать (во второй и четвертой четвертях) или находиться на одинаковом расстоянии от оси проекций (в первой и третьей четвертях), если их координаты одинаковы.

Знаки координат в каждом из октантов указаны в табл. 1.

Точка в пространстве может быть определена не только ее проекциями, но и прямоугольными (декартовыми) координатами.

Известно, что *координаты какой-либо точки — это числа, выражающие ее расстояния от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, называемых плоскостями координат.*

Таблица 1. Знаки прямоугольных координат в различных четвертях и октантах

Номер четверти или октанта	*X*	*Y*	*Z*
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-

На рис. 9 построена в проекциях точка *A* по ее координатам *x, y, z,* где *x* — абсцисса; *y* — ордината; *z* — аппликата.

Приняв оси и плоскости координат за оси и плоскости проекций, легко заметить, что абсцисса точки *(x)* — это расстояние ее от плоскости проекций *W,* координата *(y)* — расстояние от плоскости проекций *V* и аппликата (*z*) — расстояние от плоскости проекций *H.*

Как видно из приведенного изображения, каждая проекция точки определяется двумя координатами: фронтальная — абсциссой *x* и аппликатой *z,* горизонтальная — абсциссой *x* и ординатой *y,* профильная — ординатой *y* и аппликатой *z.* Следовательно, по координатам точки может быть построен и ее эпюр.

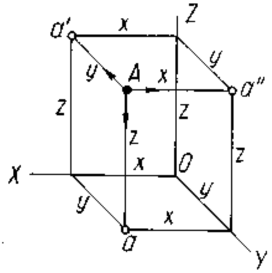


Рис. 9. Построение в проекциях точки *A* по ее координатам *x, y, z*

Проекции прямой линии определяются проекциями двух точек, принадлежащих этой линии, прямая на эпюре задается двумя проекциями.

На рис.10 приведен эпюр отрезка *AB* в системе *V, H, W.* Отрезок *AB* не параллелен ни одной из плоскостей проекций – это *отрезок прямой общего положения.* У отрезка прямой общего положения:

$$a'b' < AB;$$
$$ab < AB;$$
$$a''b'' < AB,$$

т.е. каждая его проекция меньше истинной величины самого отрезка.

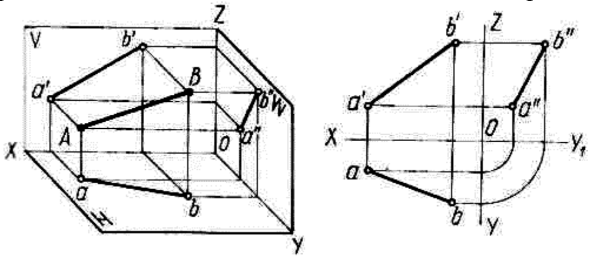
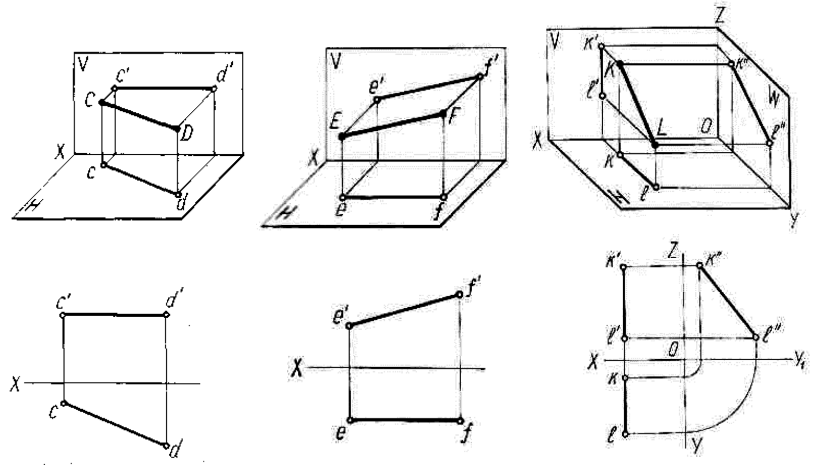


Рис. 10. Прямая общего положения

В отличие от прямых общего положения, прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций, называются прямыми частного положения. Прямые, параллельные одной из плоскостей проекций, называют линиями уровня (рис. 11).



а **б** **в**

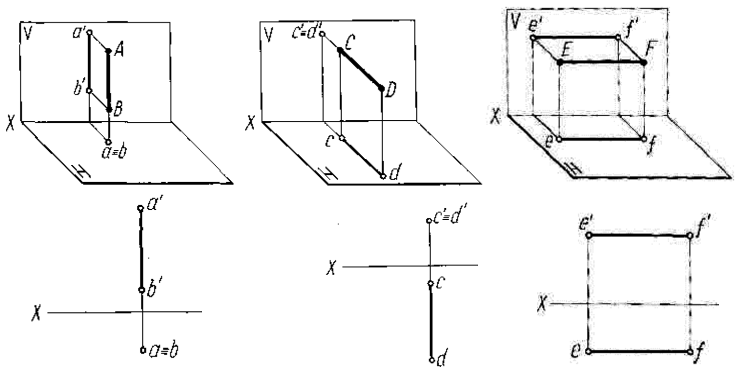
Рис. 11. Модели и эпюры прямых уровня:
а – горизонтали; **б** – фронтали; **в** – профильной прямой

Отрезок прямой *CD* (рис. 11 а) параллелен плоскости проекций *H* – это *горизонтальная прямая.* У отрезка горизонтальной прямой *cd* = *CD*.

Отрезок прямой *EF* (рис. 11 б) параллелен плоскости проекций *V* – это *фронтальная прямая.* У отрезка фронтальной прямой *e'f'* = *EF*.

Отрезок прямой *KL* (рис. 11 в) параллелен плоскости проекций *W* – это *профильная прямая.* У отрезка профильной прямой *k''l''* = *KL*.

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называют проецирующими (рис. 12): $AB \perp H$, $CD \perp V$, $EF \perp W$, *AB* — горизонтально проецирующая, *CD* — фронтально проецирующая, *EF* — профильно проецирующая прямая.



а **б** **в**

Рис. 12. Модели и эпюры проецирующих прямых: **а** – горизонтально проецирующей; **б** – фронтально проецирующей; **в** – профильно проецирующей

Длину отрезка прямой можно определить по двум его проекциям из прямоугольного треугольника abA_0 (рис. 13 а, б), в котором одним катетом является горизонтальная проекция *ab* отрезка, а другим — разность координат его концов (Δz), взятая из другой проекции. Гипотенуза A_0b прямоугольного треугольника есть длина отрезка. Угол α в этом треугольнике определяет угол наклона прямой к плоскости *H.* Длину отрезка прямой можно определить аналогично, построив прямоугольный треугольник на фронтальной проекции отрезка (рис. 13 б). Угол β в этом треугольнике определяет наклон прямой *AB* к плоскости *V.*

Следами прямой называются точки пересечения прямой с плоскостями проекций (рис. 14 а)*: M(m;m')* — горизонтальный след прямой; *N(n;n')* — фронтальный след. На рис. 14 б дан эпюр прямой *AB,* а также горизонтальный и фронтальный следы прямой.

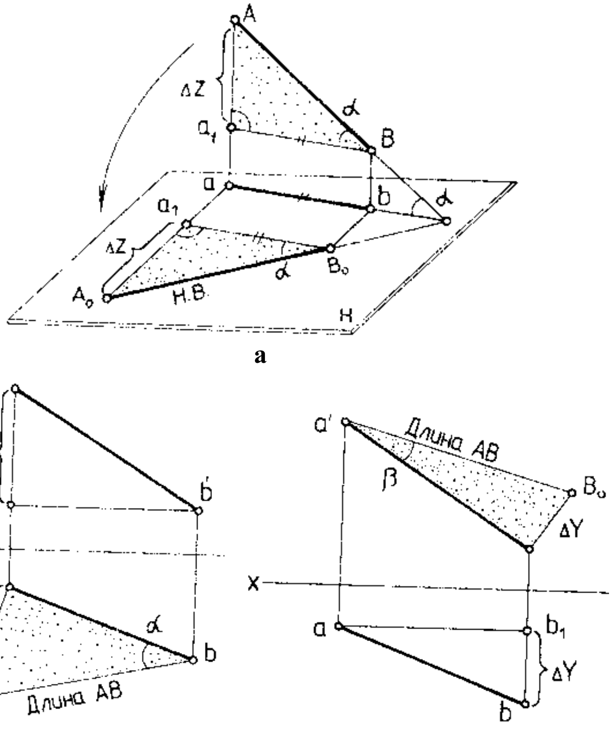
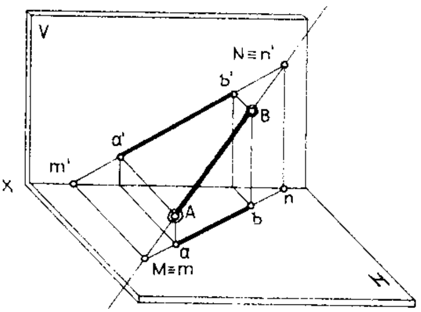


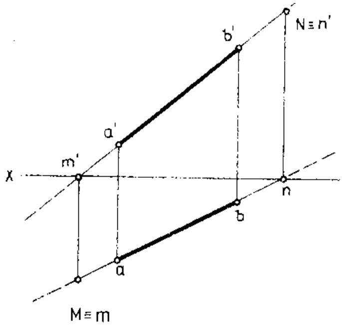
Рис. 13. Определение длины отрезка прямой способом прямоугольного треугольника

Для определения на эпюре горизонтального следа прямой необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с осью *Ox* и в этой точке восставить перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой. Фронтальный след прямой определяют аналогично.

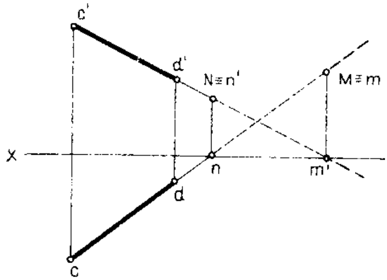
Следы прямой строятся как точки пересечения прямой со своими проекциями, поэтому каждый след совпадает со своей одноименной проекцией. Следы прямой являются точками, в которых прямая переходит из одной четверти в другую. Так, прямая *AB* (рис. 14 а, б) проходит через *I, II* и *IV* четверти пространства. Прямая *CD* (рис. 14 в) — через *I, II* и *III* четверти. Видимой частью прямой будет та ее часть, которая расположена в первой четверти.



а



б



в

Рис. 14. Модель и эпюры построения следов прямых

Тема 3
ВЗАИМНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМЫХ. ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОГО УГЛА

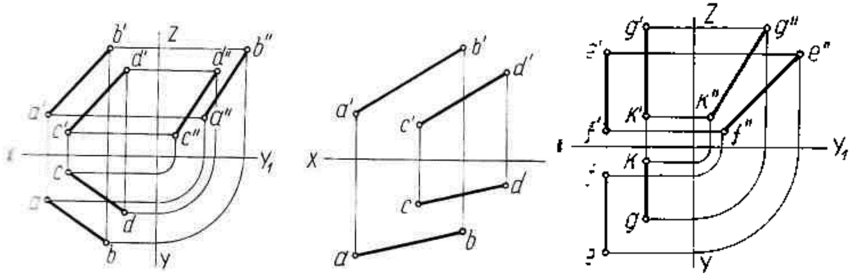
Две прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекаться или скрещиваться.

У параллельных прямых одноименные проекции на все три плоскости проекций попарно параллельны. Справедливо и обратное, т. е. если одноименные проекции двух прямых на три плоскости проекций попарно параллельны, то эти прямые параллельны между собой.

На эпюре (рис. 15 а) $ab // cd$, $a'b' // c'd'$, $a''b'' // c''d''$ — значит прямые *AB* и *CD* параллельны между собой.

Для того чтобы сделать вывод о взаимной параллельности двух прямых общего положения, достаточно параллельности их одноименных проекций в системе — *V/H* , т.е. на две плоскости проекций.

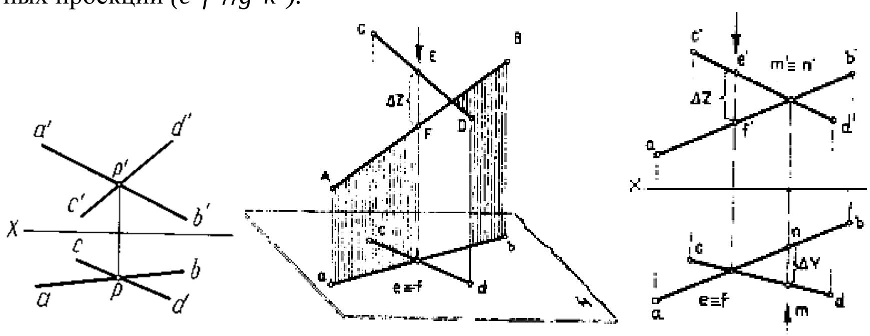
У изображенных на эпюре (рис. 15 б) прямых общего положения *AB* и *CD* горизонтальные и фронтальные проекции попарно параллельны — эти прямые параллельны между собой.



а б в

Рис. 15. Прямые в пространстве: а, б – параллельные; в – профильные

Исключением являются горизонтальные и фронтальные проекции профильных прямых. О взаимной параллельности двух профильных прямых можно судить лишь построив их профильные проекции. Горизонтальные и фронтальные проекции профильных прямых *EF* и *GK* попарно параллельны (рис. 15 в), но эти прямые не параллельны, что следует из взаимного положения их профильных проекций $(e''f''//g''k'')$.



а б в

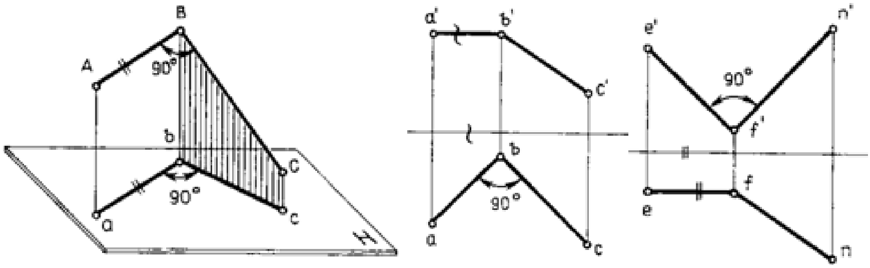
Рис. 16. Прямые в пространстве: а - пересекающиеся; б – модель скрещивающихся прямых; в – эпюр скрещивающихся прямых

У пересекающихся прямых одноименные проекции пересекаются, и точка их пересечения находится на одной линии связи. Прямые *AB* и *CD* (рис. 1 6а) пересекаются, т. е. имеют одну общую точку — точку *P*.

Прямые на рис. 16 б, в — *скрещиваются, т. е. не имеют ни одной общей точки. У скрещивающихся прямых точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной линии связи (*рис. 16 в). Точкам пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых соответствуют в пространстве две точки: в одном случае — *E* и *F*, а в другом — *M* и *N*, расположенные на прямых. На эпюре (рис. 16 б) точке пересечения горизонтальных проекций прямых соответствуют две фронтальные проекции точек e' и f', лежащие на горизонтальной проекции прямой. Аппликата (высота) точки E больше, следовательно, прямая CD в этом месте проходит над прямой AB и будет видимой при взгляде сверху. Две другие, совпадающие на фронтальной проекции точки M и N, имеют разные ординаты. Ордината точки M больше, следовательно, прямая CD в этом месте расположена ближе к зрителю и будет видимой при взгляде спереди.

Точки скрещивающихся прямых, лежащие попарно на проецирующих прямых, называются конкурирующими. Таким образом, рассмотрение на эпюре взаиморасположения конкурирующих точек дает возможность определить видимость скрещивающихся прямых, если они, например, являются ребрами многогранника. Видимость того или иного элемента объекта решается при этом для каждой проекции в отдельности.

Плоский угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если его стороны параллельны этой плоскости проекций. Но если проецируемый угол прямой, то для того чтобы он проецировался на плоскость проекций в натуральную величину, достаточно параллельности одной его стороны этой плоскости проекций.



а б

Рис. 17. Прямые, пересекающиеся под прямым углом:
а- модель; **б** – эпюры

Изображенные на рис. 17 $\angle ABC$ и $\angle EFN$ — прямые, так как одна из сторон AB параллельна плоскости проекций H, а сторона EF параллельна плоскости проекций V, на которые они спроецируются в виде прямого угла, т. е. в натуральную величину.

Тема 4
ПЛОСКОСТЬ. ПРЯМЫЕ И ТОЧКИ В ПЛОСКОСТИ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Плоскость можно рассматривать как совокупность всех прямых, проходящих через некоторую неподвижную точку и пересекающих вне ее неподвижную прямую линию.

Положение плоскости может быть определено:
- тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 18 а);
- прямой и точкой вне ее (рис. 18 б);
- двумя пересекающимися прямыми (рис. 18 в);
- двумя параллельными прямыми (рис. 18 г);
- любой плоской фигурой (например, треугольником — рис. 18 д);
- следами плоскости (рис. 18 е).

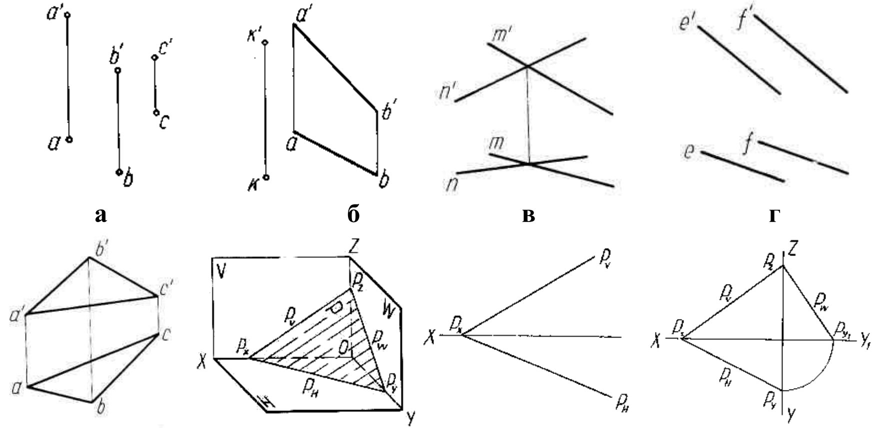


Рис. 18. Способы задания плоскости

Изображенная на рис. 18 е плоскость P пересекает плоскость проекций по прямым линиям, обозначенным P_H, P_V, и Pw – эти прямые линии называются следами плоскости: P_V — фронтальный след, P_H — горизонтальный след, Pw — профильный след плоскости P.

Задание плоскости ее следами является по существу частным случаем задания ее двумя пересекающимися прямыми, т. е. прямыми, по вторым плоскость пересекается с плоскостями проекций.

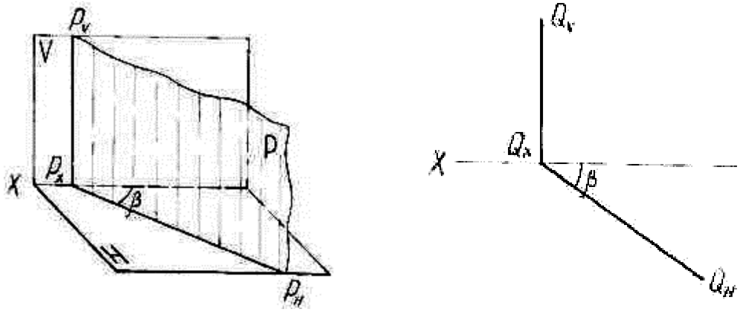
В зависимости от того, какое положение занимают плоскости относительно плоскостей проекций, можно выделить:

- плоскости общего положения – не перпендикулярные и не параллельные плоскостям проекций;
- плоскости проецирующие – перпендикулярные плоскостям проекций;
- плоскости уровня – плоскости, параллельные плоскостям проекций.

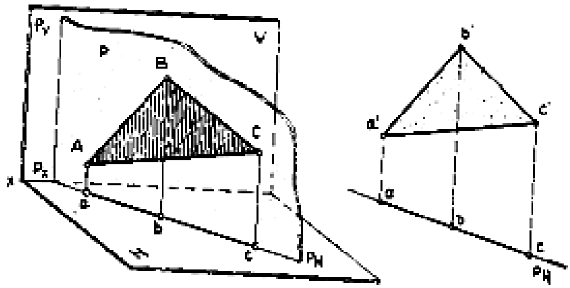
Плоскости уровня и проецирующие плоскости в отличие от плоскости общего положения называются *плоскостями частного положения*.

На рис.18 изображена *плоскость, которая не перпендикулярна ни к одной из плоскостей проекций – это плоскость общего положения.*

Плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций *H*, называется *горизонтально проецирующей плоскостью* (рис.19).



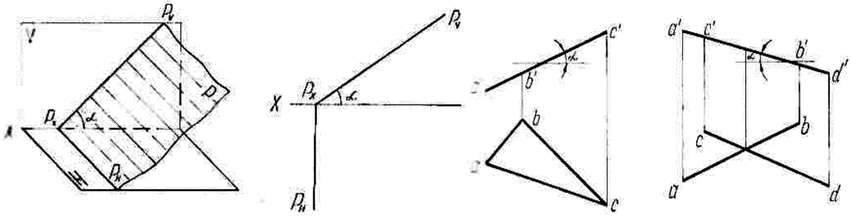
а



б

Рис. 19. Горизонтально проецирующая плоскость: а – заданная следами – модель и эпюр; **б** – заданная треугольником – модель и эпюр

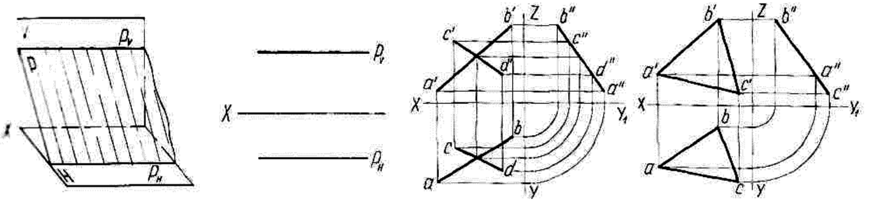
Плоскость, показанная на рис. 20, перпендикулярна к плоскости проекций *V*. Это *фронтально проецирующая плоскость.*



а **б** **в**

Рис. 20. Фронтально проецирующая плоскость: **а –**заданная следами – модель и эпюр; **б –** заданная треугольником; **в –** заданная пересекающимися прямыми

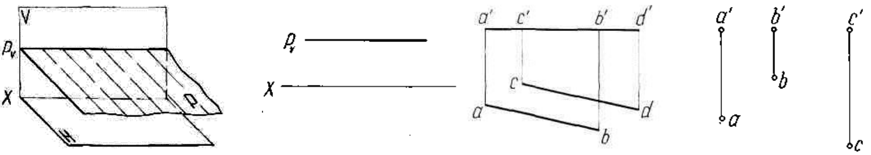
Плоскость (рис. 21), перпендикулярная к плоскости проекций *W* — *профильно проецирующая плоскость.*



а б в

Рис. 21. Профильно проецирующая плоскость: **а** – заданная следами – модель и эпюр; **б –** заданная пересекающимися прямыми; **в –** заданная треугольником

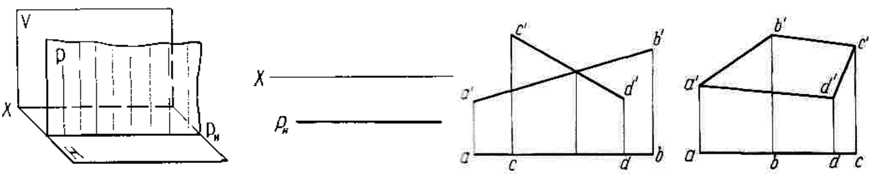
Плоскость, изображенная на рис. 22, перпендикулярна к плоскостям проекций *V* и *W,* т. е. параллельна *H* - это *горизонтальная плоскость.*



а б в

Рис. 22. Горизонтальная уровня плоскость: **а** – заданная следами – модель и эпюр; **б –** заданная параллельными прямыми; **в –** заданная тремя точками

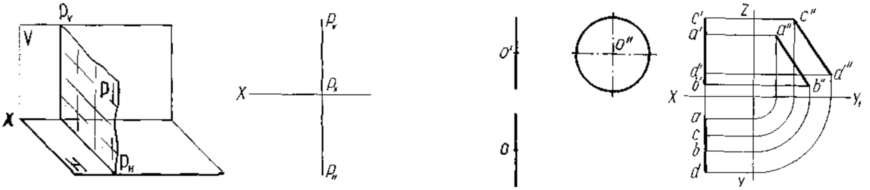
Плоскость (рис. 23), перпендикулярная к плоскостям проекций *H* и *W,* т. е. параллельная *V,* — *фронтальная.*



а б в

Рис. 23. Фронтальная уровня плоскость: **а** – заданная следами – модель и эпюр; **б –** заданная пересекающимися прямыми; **в –** заданная четырехугольником

Плоскость на рис. 24 перпендикулярна к плоскостям проекций *H* и *V,* т.е. параллельна *W* – это *профильная плоскость.*



а **б** **в**

Рис. 24. Профильная уровня плоскость: **а** – заданная следами – модель и эпюр; **б –** заданная плоской фигурой (кругом); **в –** заданная параллельными прямыми

Из курса геометрии известно, что *прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие плоскости, или проходит через одну точку, принадлежащую плоскости, и параллельна какой-то прямой, лежащей в данной плоскости.*

Применительно к начертательной геометрии первое из этих положений должно быть сформулировано так: прямая принадлежит плоскости, если ее проекции проходят через одноименные проекции двух точек, принадлежащих плоскости (точки A и B на рис. 25).

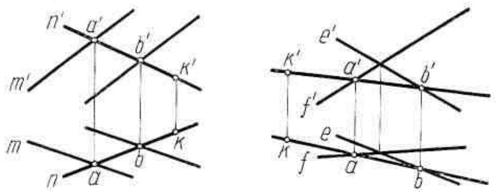


Рис. 25. Примеры принадлежности прямой плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в заданной плоскости. Это значит, что для построения какой-либо точки, принадлежащей заданной плоскости, надо построить вначале в этой плоскости прямую, а затем на ней взять точку (точка K на рис. 25).

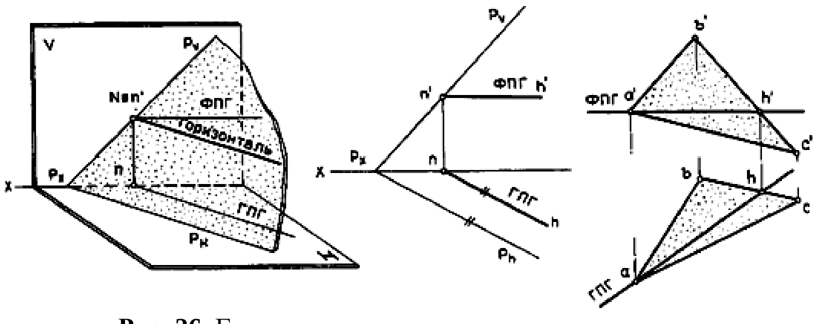


Рис. 26. Горизонталь плоскости – модель и эпюры

Среди множества прямых, которые могут быть проведены в плоскости, следует выделить *главные линии плоскости: горизонталь, фронталь, линию наибольшего ската (наклона).*

Горизонталь плоскости — прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 26).

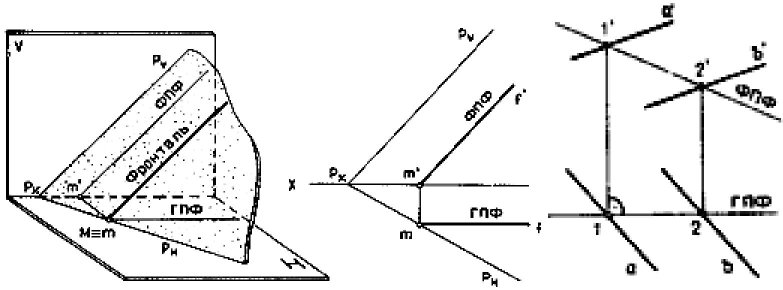
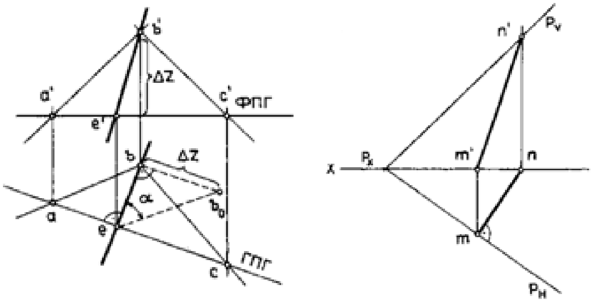


Рис. 27. Фронталь плоскости – модель и эпюры

Фронталь плоскости — прямая, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекции (рис. 27).

Линией наибольшего ската плоскости называют лежащую в этой плоскости прямую, которая перпендикулярна произвольной горизонтали или фронтали плоскости. Линии ската *NM* и *BE* определяют угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций. Он определяется построением на горизонтальной проекции отрезка прямой *be* (рис. 28а**)** прямоугольного треугольника, вторым катетом которого служит разность аппликат концов отрезка. Угол α есть угол наклона плоскости *ABC* к плоскости *H*.

Следует отметить, что следы плоскости также являются главными линиями плоскости — горизонталью и фронталью (рис. 28 б), совмещенными с плоскостями проекций. Главные линии плоскости в качестве вспомогательных прямых облегчают решение ряда задач.



а **б**

Рис. 28. Линия наибольшего ската плоскости

Две плоскости в пространстве могут быть параллельными или пересекающимися.

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 29). Если параллельные плоскости задаются на эпюре следами, то одноименные следы этих плоскостей должны быть параллельными.

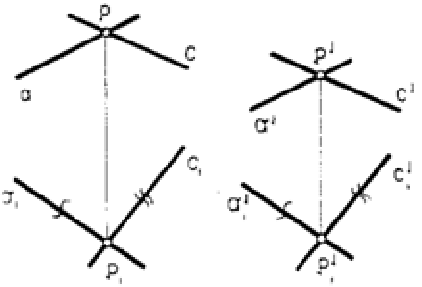


Рис. 29. Взаимно параллельные плоскости

Построение линии пересечения плоскостей — одна из основных задач начертательной геометрии. Она относится к так называемым позиционным задачам.

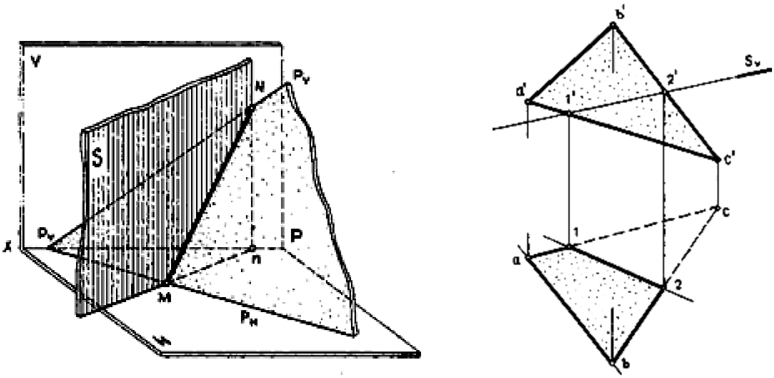
Позиционными называют задачи на определение общих элементов различных сопрягаемых геометрических форм. К ним относятся задачи на *принадлежность* геометрических элементов и на *пересечение* геометрических объектов, например, пересечение прямой и плоскости с поверхностью, пересечение двух поверхностей и, в частности, задача на пересечение двух плоскостей.

Две плоскости пересекаются по прямой линии, поэтому для построения линии пересечения плоскостей необходимо определить две точки этой прямой.

Рассмотрим *частный случай* пересечения плоскостей, когда одна из них — проецирующая.

На рис. 30 а приведены плоскость общего положения P и горизонтально проецирующая плоскость S. Двумя общими точками, принадлежащими обеим плоскостям, являются точки пересечения M и N одноименных следов этих плоскостей, которые и определяют линию пересечения.

Однако линия пересечения плоскостей может быть определена и другим образом. Если одна из пересекающихся плоскостей проецирующая, то одна из проекций линии пересечения совпадает с ее проецирующим следом. Горизонтальная проекция nm линии пересечения заданных плоскостей лежит на горизонтальном следе S_H горизонтально проецирующей плоскости S. Фронтальная проекция линии пересечения определяется линиями связи. На рис. 30 б показаны плоскость общего положения, заданная треугольником ABC, и фронтально проецирующая плоскость S. На фронтальной проекции в пересечении проецирующего следа плоскости S_v со сторонами треугольника получим две общие точки 1' и 2' и фронтальную проекцию линии пересечения плоскостей. Горизонтальная проекция определяется с помощью проведения линии связи.

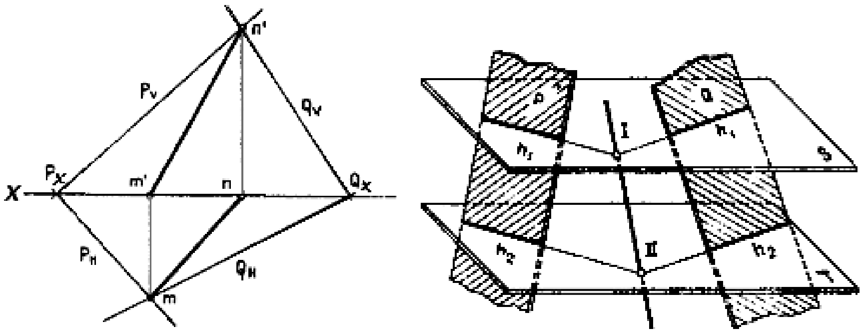


а б

Рис. 30. Пересечение плоскостей частного положения

Рассмотрим *общий случай пересечения*, когда обе плоскости — общего положения. На рис. 31 а приведены две плоскости, заданные следами. Как и в предыдущем примере, общими точками плоскостей являются точки пересечения M и N одноименных следов. Соединяя одноименные проекции этих точек прямой линией, получим проекции линии пересечения плоскостей.

Если точки пересечения одноименных следов находятся вне поля чертежа, а также в тех случаях, когда плоскости заданы не следами, а другими геометрическими элементами, для определения линии пересечения плоскостей следует использовать вспомогательные плоскости уровня (рис. 31 б) — горизонтальные или фронтальные.



а б

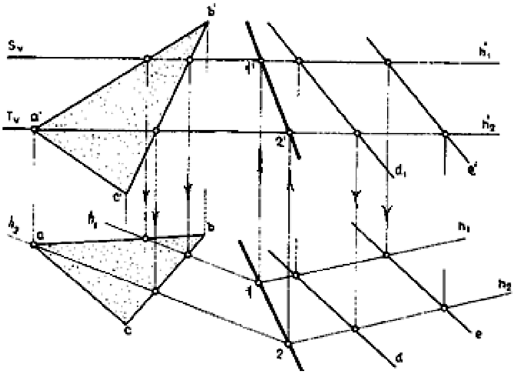


Рис. 31. Пересечение плоскостей общего положения

Прямая может находиться в плоскости, быть параллельной ей или пересекать плоскость.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости. Поэтому, чтобы провести через заданную точку прямую, параллельную плоскости, надо сначала провести в плоскости произвольную прямую, а затем провести через точку искомую прямую, параллельную прямой, принадлежащей плоскости (рис. 32).

Если прямая не принадлежит плоскости и не параллельна ей, то она пересекает данную плоскость. Задача на определение точки пересечения прямой линии с плоскостью является одной из основных в начертательной геометрии.

При решении задач на пересечение прямой с плоскостью следует выделить частный случай. Если плоскость занимает проецирующее положение, то одна проекция точки пересечения определяется в пересечении проекции прямой с проецирующим следом плоскости, а другая проекция строится с помощью линии связи (рис. 33).

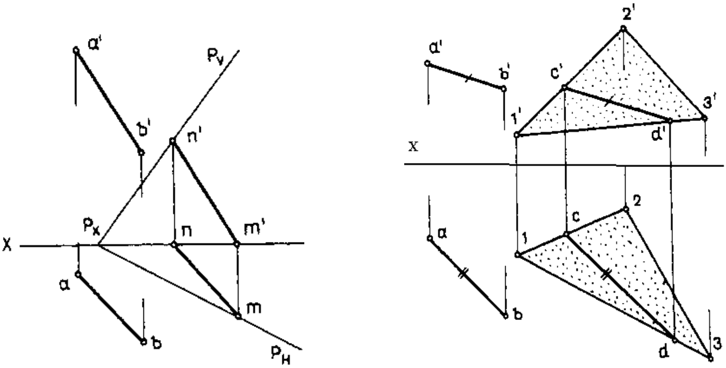


Рис. 32. Построение прямой параллельной плоскости

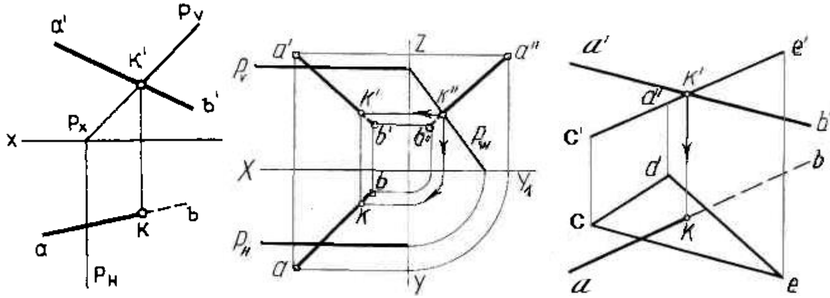


Рис. 33. Построение точки пересечения прямой с плоскостями частного положения

На рис. 30 показаны точки пересечения (точки *К)* прямой *АВ* с фронтально проецирующей и профильно проецирующей плоскостями. Искомые точки (точки *К)* отмечены из следующих соображений. Точка пересечения прямой с плоскостью есть точка, принадлежащая как прямой, так и плоскости (общая точка). Следовательно, проекции ее, исходя из принадлежности ее прямой, должны лежать на одноименных проекциях прямой, а исходя из принадлежности ее плоскости — на соответствующем следе плоскости. Точка, удовлетворяющая этим требованиям — единственная, это точка *К.*

Если плоскость общего положения, точка пересечения прямой с плоскостью определяется с помощью вспомогательной секущей плоскости.

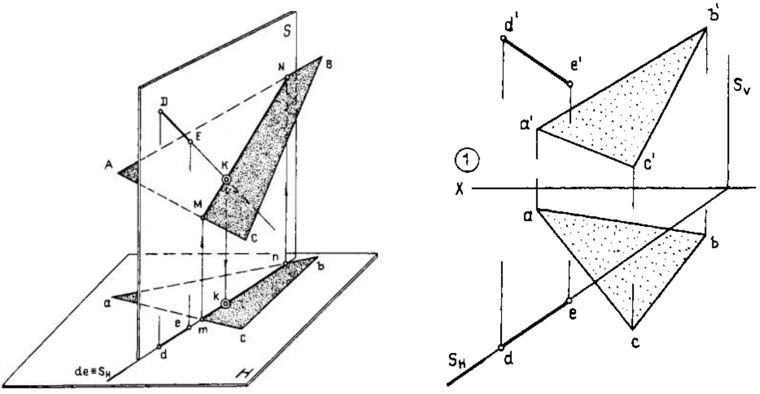
Для построения точки пересечения прямой линии с плоскостью необходимо (рис. 34):

1) провести через прямую *DE* вспомогательную проецирующую плоскость *S*;

2) построить линию *MN* пересечения данной плоскости и вспомогательной;

3) определить искомую точку *К* пересечения данной прямой *DE* с линией пересечения плоскостей *MN;*

4) определить видимость участков прямой.



а **б**

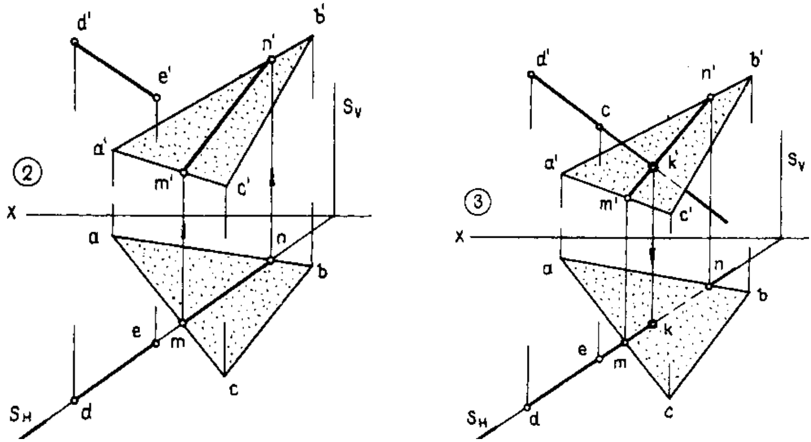


Рис. 34. Построение точки пересечения прямой с плоскостью общего положения: **а** –модель; **б –** эпюры этапов построения точки *К*

Плоскости (в том числе и плоскости проекций) обычно считаются непрозрачными. Поэтому та часть прямой линии, которая находится за плоскостью, невидима. На рис. 33, например, невидимая часть изображена штриховой линией. Видимость прямой относительно плоскости может быть очевидна. Однако так бывает далеко не всегда. В общих случаях видимость определяется конкурирующими точками — точками, лежащими на одном перпендикуляре к плоскости проекций (см. рис. 16 в, 35). На рис. 35 относительно плоскости проекций *V* видимой будет точка 2, относительно плоскости проекций *H* — точка 3, т. е. относительно какой-либо плоскости проекций видимой будет точка, находящаяся на большем удалении от нее. Невидимые конкурирующие точки, как правило, помещаются в скобки.

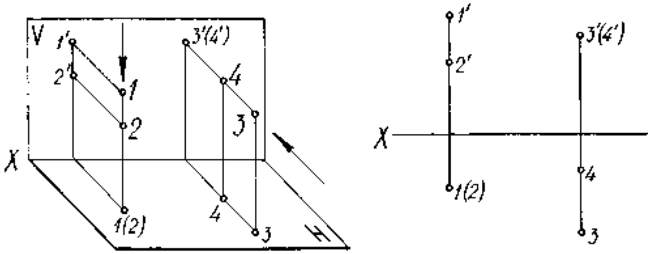


Рис. 35. Конкурирующие точки модель и эпюр

Аналогично находят линию пересечения двух плоскостей, например, заданных треугольниками, и определяют видимость участков плоскостей, (рис. 36). На рис. 36 приведены две плоскости общего положения, заданные треугольниками *ABC* и *DEF*. Для построения линии пересечения плоскостей следует определить две точки этой линии. Ими являются точки пересечения сторон одного треугольника с плоскостью другого. Точка *M* линии пересечения определена с помощью горизонтально проецирующей плоскости S, проведенной через сторону EF треугольника DEF, а точка N линии пересечения определена с помощью фронтально проецирующей плоскости T, проведенной через сторону BC треугольника ABC.

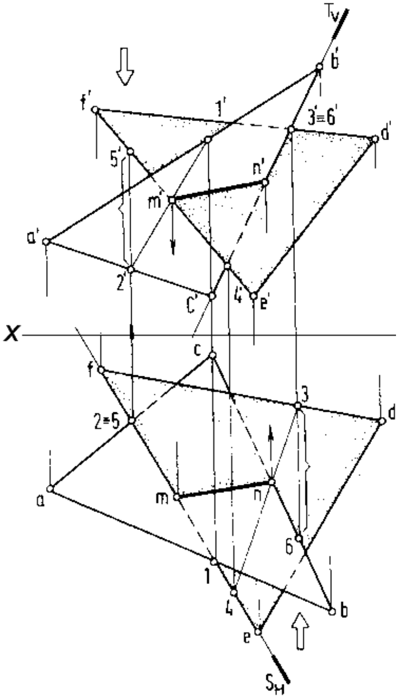


Рис. 36. Пересечение двух плоскостей, заданных треугольниками

Таким образом, здесь дважды применена рассмотренная ранее задача на пересечение прямой линии с плоскостью.

Прямая перпендикулярна плоскости, если ее проекции перпендикулярны одноименным следам плоскости или соответствующим проекциям горизонтали и фронтали (рис. 37). На рис. 37 а, б показана прямая AB, перпендикулярная плоскости P, заданной следами. Проведем в плоскости P через точку B горизонталь. На основе правила проецирования прямого угла угол, образованный перпендикуляром AB и горизонталью, будет проецироваться на плоскости H прямым (угол abn=90°). Аналогичный вывод можно сделать и в отношении фронтальной проекции перпендикуляра.

Для того чтобы построить прямую, перпендикулярную плоскости, заданной треугольником BCD (рис. 37 в), не следует строить следы плоскости. Необходимо сначала построить в плоскости горизонталь и фронталь, а затем провести проекции перпендикуляра под прямым углом к одноименным проекциям горизонтали и фронтали.

Таким образом, если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

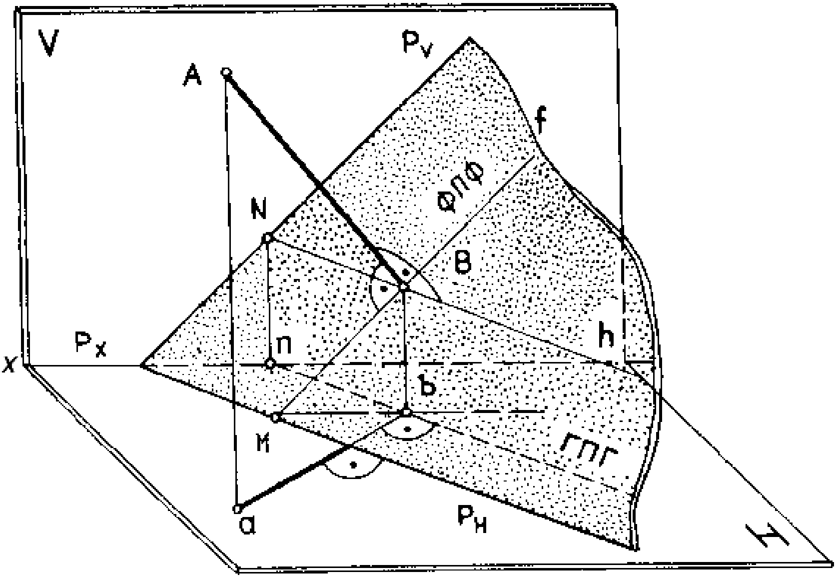
Пусть требуется определить расстояние от точки до плоскости. Иными словами, необходимо определить длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.

Задача решается в три этапа, каждый из которых представляет собой одну из рассмотренных ранее задач:

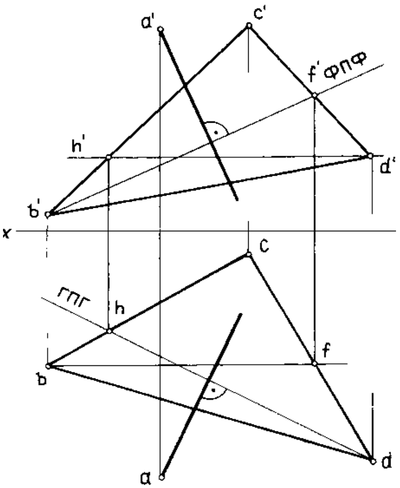
1) определить направление проекций перпендикуляра к плоскости (рис. 37);

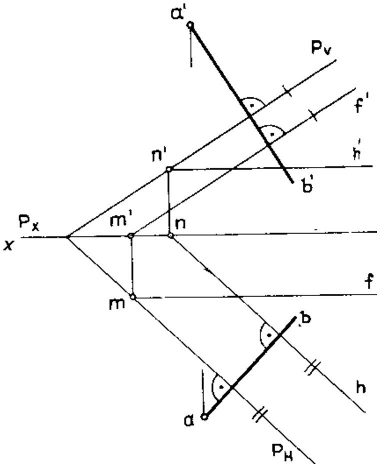
2) построить точку пересечения прямой (перпендикуляра) с плоскостью (рис. 34);

3) определить длину перпендикуляра способом прямоугольного треугольника (рис. 13).



а





б **в**

Рис. 37. Перпендикуляр к плоскости: **а** – модель; **б** – перпендикуляр к плоскости, заданной следами; **в** – перпендикуляр к плоскости треугольника

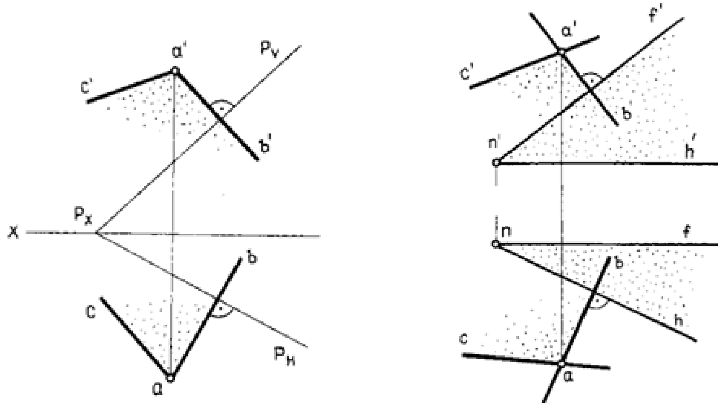


Рис. 38. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой. На рис. 38 проведена прямая *AB,* перпендикулярная плоскости, заданной в одном случае следами, а в другом — горизонталью и фронталью. Через прямую *AB* можно провести множество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости. Следовательно, искомая плоскость, заданная пересекающимися прямыми *A*В и *AC***,** будет перпендикулярна плоскостям *P* и *HNF*.

Тема 5
СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. СПОСОБ СОВМЕЩЕНИЯ

Способы преобразования проекций предназначены главным образом для решения метрических задач, связанных с определением действительных размеров и формы изображенных на эпюре геометрических объектов. Две ортогональные проекции геометрического образа определяют его положение в пространстве. Однако произвольное положение такого геометрического образа относительно плоскости проекций не всегда удобно для решения ряда позиционных и метрических задач. Здесь происходит искажение в проекциях проецируемых форм, отсутствует необходимая наглядность как объекта в целом, так и отдельных его элементов.

Во многих случаях решение задач значительно упрощается, если заданные геометрические элементы занимают в пространстве частное положение, поэтому в основе способов преобразования проекций – переход от общего положения к частному, когда величина и форма объекта проецируются без искажения.

Различные требования к чертежу, а также необходимые условия для упрощения решения ряда позиционных и метрических задач требуют построения новых, дополнительных проекций, исходя из двух заданных. Дополнительные проекции позволяют получить либо выраженные проекции отдельных элементов, либо их натуральные величины. Построение новых, дополнительных проекций называют преобразованием чертежа или проекций. Такое преобразование может быть выполнено следующими способами: заменой плоскостей проекций (рис. 39 – 41), вращением (рис.42 – 44), совмещением (рис. 45), плоскопараллельным перемещением (рис. 46).

Новые проекции точек и осей проекций обозначают теми же буквами, но с цифровым индексом внизу, который определяет последовательность преобразований.

Способ замены плоскостей проекций. Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что при неизменном положении объекта в пространстве производится замена данной системы плоскостей проекцией новой системой взаимно перпендикулярных плоскостей проекций (см. рис. 39 а). При переходе к новой системе одну из плоскостей проекций заменяют новой плоскостью таким образом, чтобы данный геометрический элемент (прямая, плоскость) занял частное положение и проецировался без искажения.

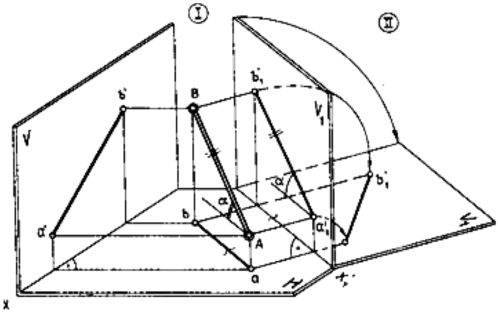
При решении ряда метрических задач требуется преобразовать прямую общего положения в прямую уровня, а затем — в проецирующую, выполнив при этом последовательно два преобразования.

Рассмотрим ход решения этой задачи.

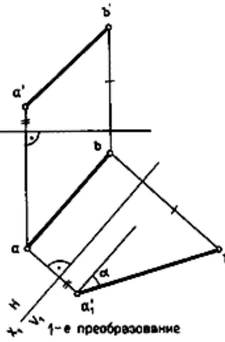
Первое преобразование (см. рис. 39 б). Для того чтобы прямая AB спроецировалась линией уровня, следует ввести новую плоскость проекций и расположить ее параллельно данной прямой. При этом новая ось x_1 будет параллельна одной из проекций прямой. На рис. 39 а, б ось проведена параллельно горизонтальной проекции ab, а новая плоскость проекций V_1 расположена параллельно прямой AB, которая проецируется на эту плоскость в истинную величину (новая фронтальная проекция прямой — $a_1'b'_1$). Новая ось x_1 и плоскость проекции V_1 могут быть расположены на любом расстоянии от прямой, они могут совпадать с прямой и ее проекцией.

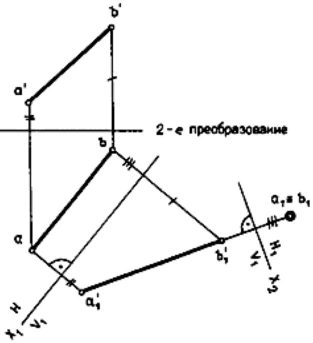
При замене плоскостей проекций расстояние от новой проекции точки до новой оси равно расстоянию от заменяемой проекции точки до старой оси проекций. Иными словами, высоты (аппликаты) концов отрезка в новой системе плоскостей проекций останутся прежними. В результате этой замены определены действительная величина отрезка прямой и угол наклона α к плоскости H. При переходе к эпюру плоскость V_1 совмещается с плоскостью H.

Второе преобразование (см. рис. 39 в). Для того чтобы прямая AB оказалась проецирующей, т. е. изобразилась точкой, необходимо произвести вторую замену плоскости проекций и расположить новую плоскость H_1 перпендикулярно прямой. Новая ось x_2 выбрана на эпюре перпендикулярной новой фронтальной проекции прямой $a_1'b'_1$. На новой плоскости проекций H_1, прямая изобразится точкой, так как координаты концов отрезка в системе H_1/V_1 одинаковы.



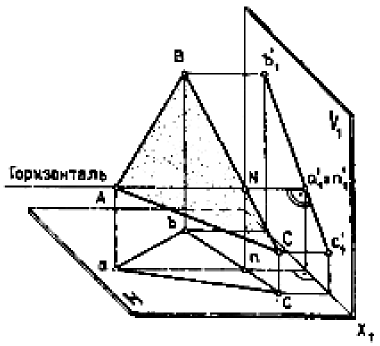
а

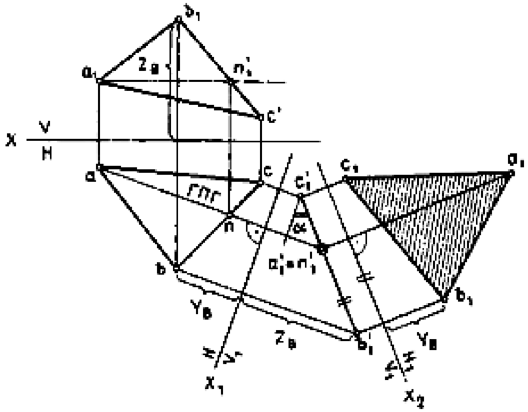




б в

Рис. 39. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня способом замены плоскостей проекций





а б

Рис. 40. Определение истинной величины плоской фигуры общего положения способом замены плоскостей проекций:
а – модель; **б** – эпюр

Таким образом, прямая *AB* в системе H_1/V_1 стала проецирующей относительно плоскости H_1. Преобразования в этой задаче могли быть выполнены и в другой последовательности: сначала могла быть заменена горизонтальная плоскость проекций, а затем — фронтальная.

Рассмотрим еще одну задачу: требуется определить истинную величину плоской фигуры — треугольника *ABC*, занимающего в пространстве общее положение. Для решения этой задачи необходимо преобразовать эпюр так, чтобы плоскость общего положения стала параллельной одной из плоскостей проекций новой системы. В ортогонально-проекционной системе решить эту задачу одной заменой плоскости проекций нельзя. Как и в предыдущей задаче, необходимо выполнить два преобразования, но в иной последовательности: сначала следует преобразовать плоскость общего положения в проецирующую, а затем — в плоскость уровня.

На рис. 40 а сначала заменена фронтальная плоскость проекций новой плоскостью V_1, перпендикулярной плоскости треугольника. Это условие выполнено с помощью вспомогательной прямой — линии уровня, например, горизонтали *AN* (см. рис. 40 б). Новая ось x_1 проведена на эпюре перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали. На новой плоскости проекций V_1 горизонталь спроецировалась в точку, а плоскость треугольника — в линию.

Угол α определяет угол наклона треугольника к горизонтальной плоскости *H*.

На втором этапе решения проведена вторая замена — новая плоскость проекций H_1 установлена параллельно треугольнику. Новая ось x_2 проведена параллельно новой фронтальной проекции треугольника — прямой $a'_1b'_1c'_1$. Построенная проекция определяет истинную величину и форму треугольника.

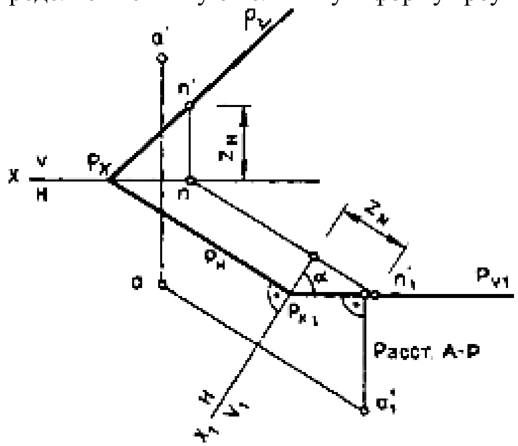


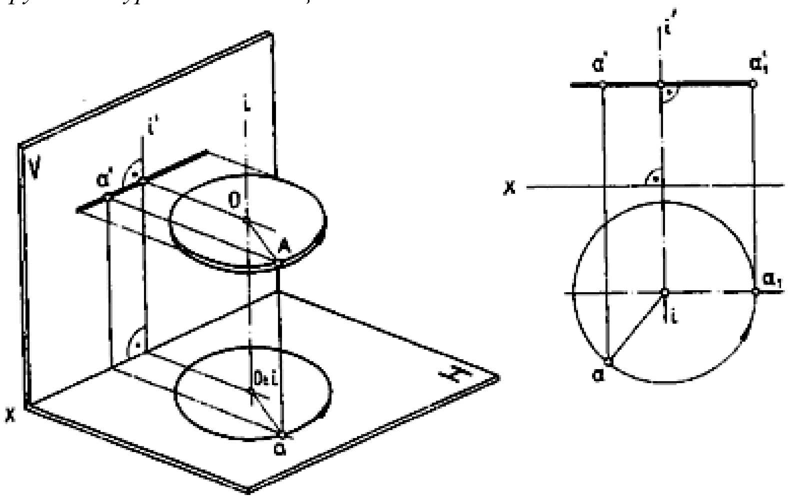
Рис. 41. Преобразование плоскости общего положения, заданной следами в проецирующую, способом замены плоскостей проекций

Если плоскость задана следами, а не плоской фигурой, ее следует преобразовать в проецирующую (см. рис. 41). Для этого новую плоскость проекций и новую ось проекций следует расположить перпендикулярно, например, к горизонтальному следу заданной плоскости, при этом горизонтальный след спроецируется на новой плоскости в точку (P_{x1}).

Для построения новой проекции фронтального следа P_{y1} достаточно найти проекцию любой точки заданной плоскости, например произвольной точки N, лежащей на следе. Прямая P_{x1} – n'_1 является искомым проецирующим следом данной плоскости.

Способ вращения. Сущность способа вращения состоит в изменении положения объекта, заданного на эпюре, таким образом, чтобы определенные его элементы заняли относительно плоскостей проекции частное положение и проецировались без искажения.

Вращение может производиться вокруг осей, расположенных относительно плоскостей проекций различным образом. *Ниже рассматриваются следующие разновидности способа вращения: вращение вокруг проецирующих осей, вращение вокруг линий уровня и совмещение.*



а **б**

Рис. 42. Вращение вокруг проецирующих осей:
а - модель; **б –** эпюр

Вращение вокруг проецирующих осей. При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, одна ее проекция перемещается по окружности, а вторая — по прямой, перпендикулярной проекции оси вращения (см. рис. 42 а).

Окружность, описываемая точкой A, спроецируется на плоскости H без искажения, а на плоскости V — в виде отрезка прямой. При вращении точки вокруг фронтально проецирующей оси ее траектория проецируется на фронтальную плоскость проекций окружностью, а на горизонтальную плоскость — отрезком прямой, перпендикулярным проекции оси.

В процессе решения задач способом вращения вокруг проецирующих осей этапы преобразований геометрических элементов аналогичны тем, которые выполнялись способом замены плоскостей проекций.

На рис. 44 прямая общего положения одним вращением вокруг горизонтально проецирующей оси *i* преобразована в линию уровня (фронталь), а затем вторым вращением вокруг оси i_1, перпендикулярной фронтальной проекции, приведена в проецирующее положение — проецируется на плоскость *H* в точку.

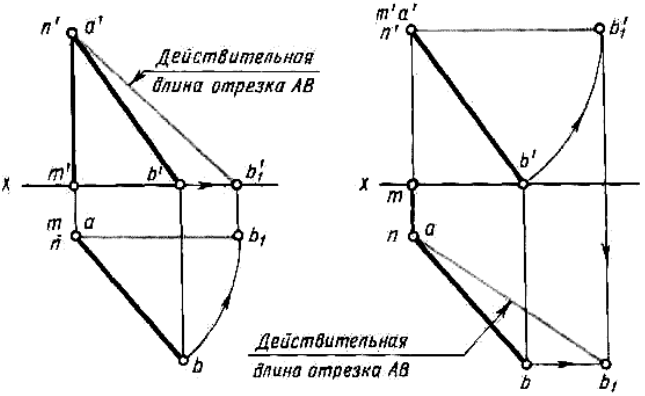
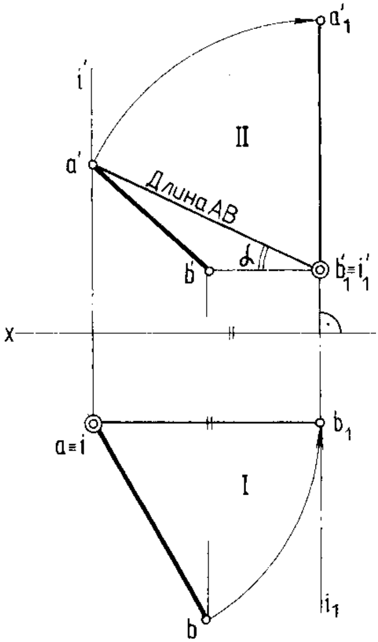


Рис. 43. Определение натуральных величин прямых общего положения способом вращения



Преобразования, аналогичные тем, которые выполнялись способом замены плоскостей проекций, производятся и при определении вращением действительной величины плоской фигуры.

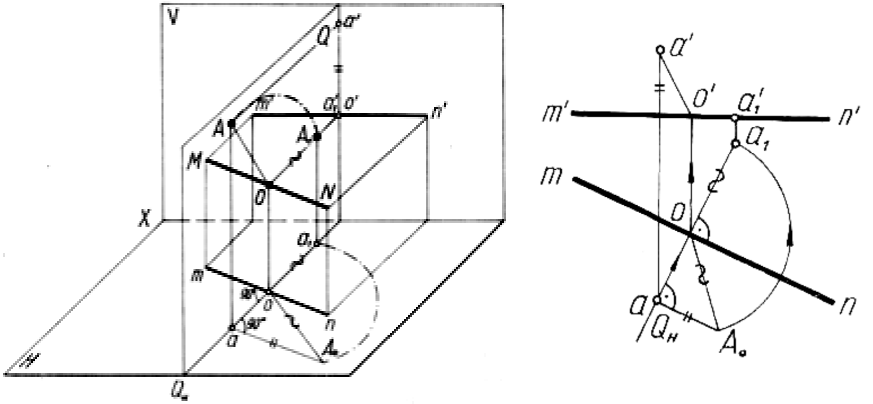
Двойное вращение вокруг проецирующих осей приводит обычно к тому, что последующие построения и новая проекция объекта накладываются на заданную проекцию, что затрудняет чтение эпюра. Поэтому способ вращения вокруг проецирующих осей целесообразно применять при решении задач одним вращением.

Вращение вокруг линий уровня. Этот способ применяется для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня и для определения действительной величины плоской фигуры. Задача решается одним вращением вокруг линии уровня данной плоскости – горизонтали или фронтали.

Рис. 44. Преобразование прямой общего положения в проецирующую способом вращения вокруг проецирующих осей

На рис. 45 а показано вращение некоторой точки A вокруг горизонтальной прямой MN до тех пор, пока точка A не окажется в плоскости, параллельной плоскости проекций H и определяемой этой точкой и осью вращения.

При вращении вокруг горизонтальной прямой MN точка A перемещается по дуге радиуса OA, лежащей в плоскости Q, перпендикулярной к оси вращения. Когда точка A займет нужное положение A_1, горизонтальная проекция радиуса вращения (oa_1) будет равна его истинной величине, которая может быть определена способом прямоугольного треугольника. На рис. 45 б эти же построения выполнены на эпюре.



а **б**

Рис. 45. Вращение точки вокруг горизонтальной прямой:
а – модель; **б –** эпюр

На рис. 46 в плоскости, заданной треугольником ABC, проведена горизонталь через вершину A и точку D на продолжении противоположной стороны треугольника. Горизонталь принята за ось вращения. Точки A и D при вращении останутся неподвижными. Вершины B и C вращаются по окружностям, которые проецируются на горизонтальной проекции отрезками прямых, перпендикулярными проекции оси. Так как треугольник должен занять горизонтальное положение, радиус вращения вершины B, например, должен проецироваться в натуральную величину. Длину радиуса R_B можно определить способом прямоугольного треугольника. Определив горизонтальное положение радиуса вращения вершины B, построим вершину C_1 в пересечении прямой b_1d с проекцией ее траектории вращения. Полученная проекция ab_1c_1 и определяет истинную величину треугольника.

Совмещение — частный случай вращения вокруг горизонтали или фронтали, когда осью вращения является горизонтальный или фронтальный след плоскости. При вращении плоскости вокруг ее горизонтального или фронтального следа до совмещения с соответствующей плоскостью проекций лежащая в этой плоскости фигура спроецируется на плоскость проекций в натуральную величину.

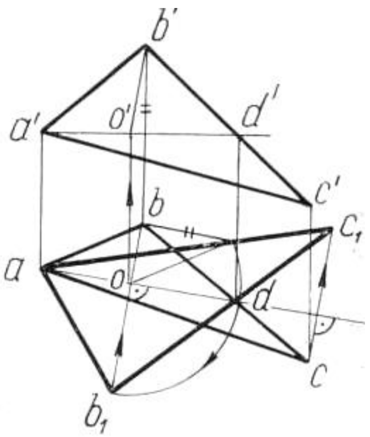


Рис. 46. Вращение треугольника вокруг горизонтальной прямой

Чтобы найти истинную величину плоской фигуры способом совмещения, надо совместить с одной из плоскостей проекций ряд характерных точек ее периметра.

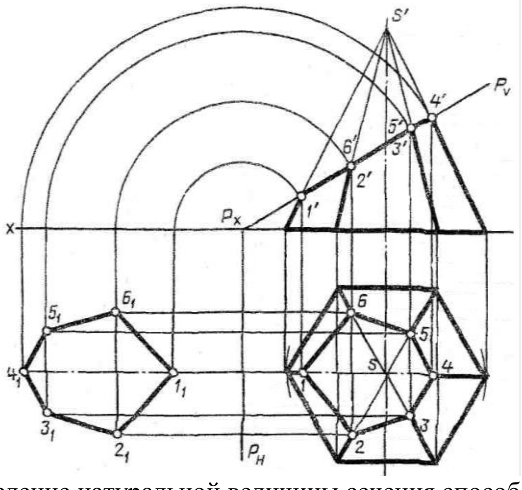
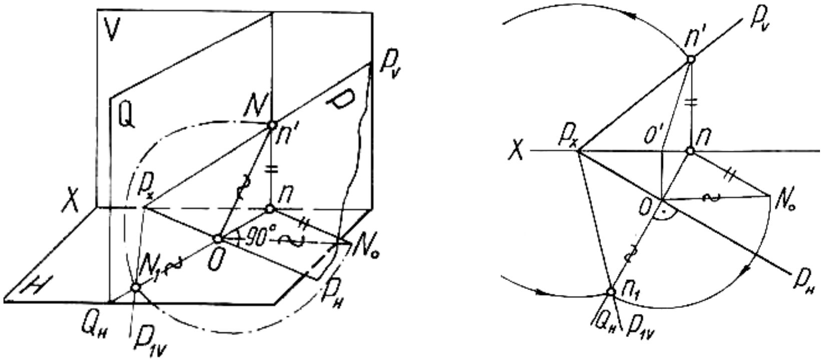


Рис. 47. Определение натуральной величины сечения способом совмещения

На рис. 48 а показано совмещение некоторой плоскости *P* с плоскостью проекций *H*. Так как горизонтальный след плоскости *P* (P_H) – ось вращения, то его положение и положение точки P_X не меняется. Для нахождения P_V в совмещенном положении (P_{1V}) на нем взята произвольная точка *N* и найдено новое положение ее, совмещенное с плоскостью проекций *H* (N_1). Точка *N* при вращении вокруг P_H перемещается в плоскости *Q*, перпендикулярной к P_H, по дуге радиуса *ON*, и совмещенное положение ее (N_1) определяется пересечением этой дуги с Q_H. Фронтальный след плоскости в совмещенном положении (P_{1V})

проведен через точки P_X и N_1. При этом отрезок ON_1 является истинной величиной радиуса вращения.

На рис. 48 б эти построения выполнены на эпюре. Истинная величина радиуса вращения найдена способом прямоугольного треугольника. Однако практически определять истинную величину радиуса вращения точки N нет необходимости, так как отрезок P_Xn' равен отрезку P_XN_1. Поэтому для нахождения точки N_1 достаточно провести дугу радиуса P_Xn' до пересечения с P_H.

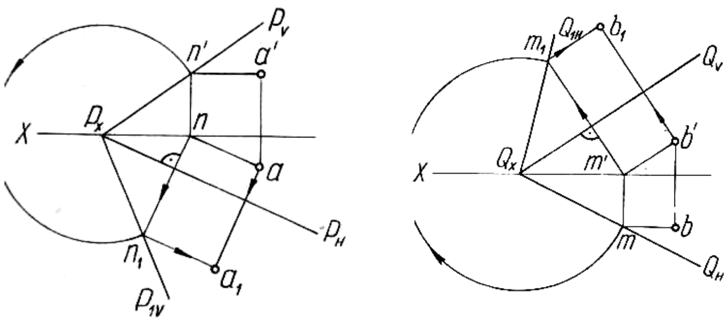


а б

Рис. 48. Совмещение плоскости P с плоскостью проекций H:
а - модель; **б –** эпюр

На рис. 49 а выполнено совмещение заданной плоскости P и лежащей в ней некоторой точки A с плоскостью проекций H. Для этого вначале найдено совмещенное с плоскостью H положение горизонтали AN (a_1n_1), на которой находится точка A, и на ней отмечена точка a_1.

На рис. 49 б плоскость Q и лежащая в ней точка B совмещены с плоскостью проекций V.



а б

Рис. 49. Совмещение плоскости с плоскостью проекций: **а** – с H; **б –** с V

Способ плоскопараллельного перемещения. Плоскопараллельное перемещение можно рассматривать как вращение вокруг невыявленных проецирующих прямых. При плоскопараллельном перемещении геометрического образа одна из его проекций (оставаясь равной самой себе) перемещается в плоскости проекций, другие проекции точек геометрического образа перемещаются по прямым, параллельным направлению оси проекций (рис. 50).

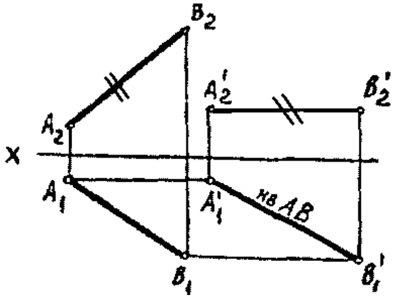


Рис. 50. Определение натуральной величины прямой способом плоскопараллельного перемещения

На рис. 51 плоскость треугольника общего положения двумя последовательно проведенными перемещениями приведена в положение, параллельное плоскости *H.* Первое перемещение (*I*) выполнено с помощью вспомогательной линии уровня — горизонтали. Треугольник приведен во фронтально-проецирующее положение. Вторым перемещением *(II)* плоскость приведена в горизонтальное положение. Новую проекцию располагают на свободном поле эпюра. Перемещение проводится параллельно плоскостям проекций, поэтому изображения вершин треугольника на второй проекции перемещаются по прямым, перпендикулярным линиям связи.

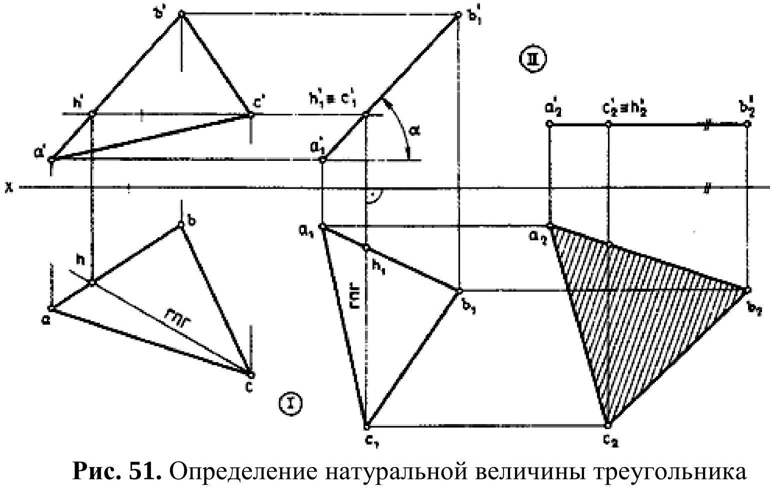


Рис. 51. Определение натуральной величины треугольника способом плоскопараллельного перемещения

Тема 6
МНОГРАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГРАННИКА ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Все поверхности можно разделить на две большие группы: многогранные и кривые.

Многогранной называется поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей (рис. 52). *Многогранником* называется тело, ограниченное многогранной поверхностью, состоящей из плоских многоугольников. Части пересекающихся плоскостей называются *гранями,* а линии их пересечения — *ребрами.* Точки пересечения ребер называются *вершинами.* Совокупность ребер и вершин многогранной поверхности называется *сеткой.*

Многогранная поверхность называется *выпуклой,* если она расположена по одну сторону от плоскости любой ее грани. Сечение выпуклого многогранника плоскостью — всегда выпуклый многоугольник.

Наиболее распространенные многогранники — призмы и пирамиды. Призму, ребра которой перпендикулярны основанию, называют *прямой.* Если в основании прямой призмы — прямоугольник, призму называют *параллелепипедом.*

Изображение на чертеже проекций многогранника есть по существу изображение проекций вершин (точек), ребер (прямых) и граней (плоскостей).

Видимость ребер многогранника. Необходимость в определении на эпюре видимости проекций ребер многогранника возникает постоянно. Иногда эта задача решается просто, однако в более сложных случаях целесообразно применить способ конкурирующих точек, что дает безошибочное решение.

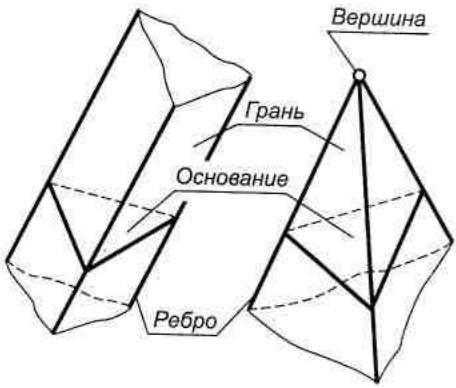


Рис. 52. Элементы многогранной поверхности

Внешний контур проекций многогранника всегда видимый. Видимость ребер внутри контура следует определять на каждой проекции отдельно, рассматривая взаиморасположение ребер.

На рис. 53 даны проекции четырехгранника. На фронтальной проекции конкурирующими точками скрещивающихся ребер являются точки *1* и *2*, а на горизонтальной проекции — точки *3* и *4*. Анализ взаиморасположения конкурирующих точек позволяет установить, что на фронтальной проекции ребро *BD* будет видимым, а ребро *AC* — невидимым. На горизонтальной проекции ребро *AD* будет видимым, а ребро *BC* — невидимым

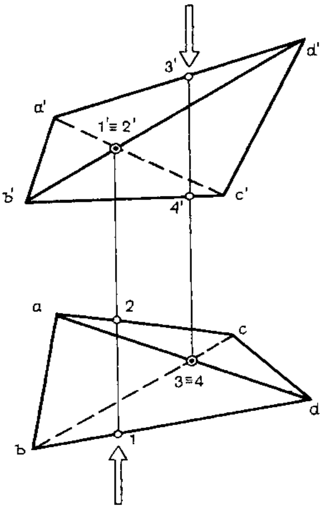
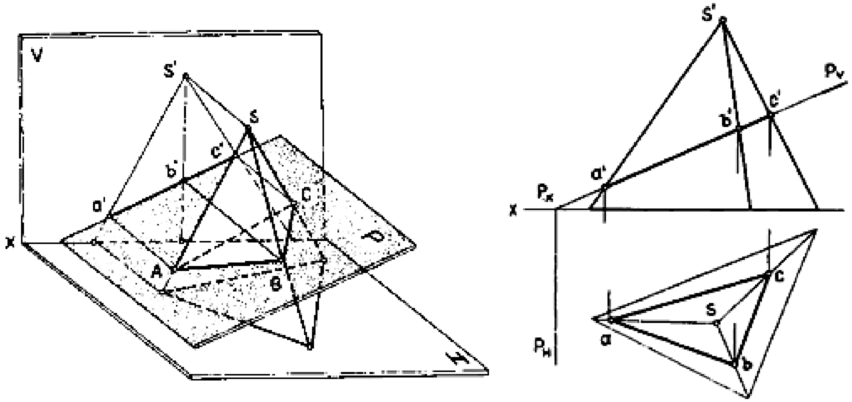


Рис. 53. Определение видимости ребер многогранника способом конкурирующих точек

Пересечение многогранника плоскостью.

Линией пересечения поверхности многогранника плоскостью является плоский многоугольник. Его вершины являются точками пересечения ребер с заданной плоскостью, а стороны — линиями пересечения граней с плоскостью (рис. 54 а). Таким образом, построение сечения многогранника плоскостью сводится к определению точек пересечения прямой с плоскостью или к определению линии пересечения плоскостей.



а **б**

Рис. 54. Пересечение пирамиды фронтально проецирующей плоскостью: **а** – модель; **б –** эпюр

Плоская фигура, которая получается при пересечении многогранника плоскостью, называется сечением. Построение сечений значительно упрощается, если секущая плоскость является проецирующей. В этом случае одна проекция сечения совпадает с проецирующим следом плоскости.

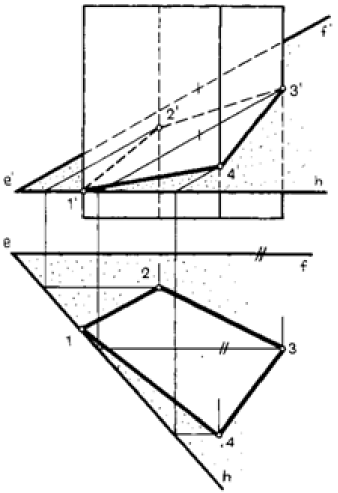


Рис. 55. Пересечение призмы плоскостью общего положения

1. Пересечение пирамиды фронтально проецирующей плоскостью. На рис. 49 б фронтальная проекция *a', b', c'* сечения совпадает с фронтальным следом P_v секущей плоскости. Проведя линии связи до горизонтальных проекций соответствующих ребер многогранника, получим горизонтальную проекцию сечения.

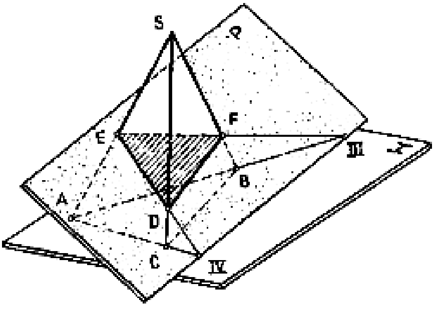
2. Пересечение прямой призмы плоскостью общего положения (рис. 55). Секущая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми — горизонталью и фронталью. Построение сечения, как и в предыдущей задаче, упрощается, так как боковые грани призмы — горизонтально проецирующие плоскости. Следовательно, горизонтальная проекция сечения известна, она совпадает с горизонтальной проекцией боковых граней и ребер призмы.

Для построения фронтальной проекции сечения необходимо спроецировать точки *1, 2, 3* и *4,* принадлежащие секущей плоскости, на фронтальную проекцию. Воспользуемся какой-либо линией уровня, например фронталью (или любой другой прямой). Проводим через точки *2, 3* и *4* горизонтальные проекции фронталей, а затем строим фронтальные их проекции. В пересечении с соответствующими фронтальными проекциями ребер получим искомые проекции точек пересечения ребер с плоскостью. Соединив полученные точки прямыми в последовательности, которая задана горизонтальной проекцией, и определив невидимые участки сечения, закончим построение.

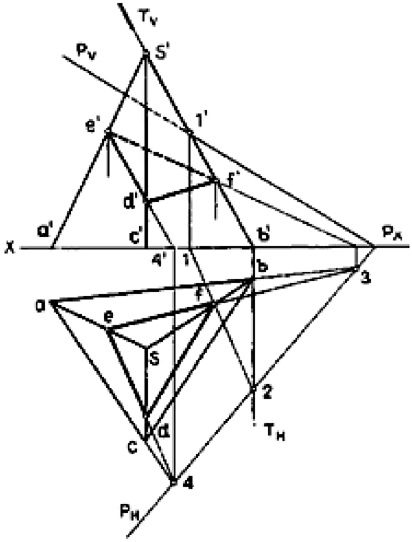
Итак, при построении пересечения многогранника плоскостью необходимо выделить частный случай, когда один из пересекающихся элементов (секущая плоскость или пересекаемая поверхность) занимает проецирующее положение и одна проекция сечения известна.

3. *Пересечение пирамиды плоскостью общего положения* (рис. 56 *а, б).* В отличие от задачи, приведенной на рис. 54, здесь необходимо построить обе проекции сечения. Горизонтальный след секущей плоскости не пересекает основание пирамиды, следовательно, пересекается ее боковая поверхность. Сечение должно иметь форму треугольника, вершинами которого будут точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью. Точка пересечения ребра *SB* пирамиды с плоскостью *P* найдена с помощью вспомогательной фронтально проецирующей плоскости *T.* Аналогично могла быть построена точка *E* сечения. Однако можно применить и другой прием. Продолжим ребро *AB,* которое является горизонтальным следом грани *ABS* пирамиды, до пересечения с горизонтальным следом секущей плоскости в точке *3*. Точки *F* и *3* принадлежат линии пересечения *EF* данной грани и секущей плоскости. Построим третью точку *D* таким же способом, так как вспомогательная секущая плоскость, проведенная через ребро *CS*,

будет параллельна профильной плоскости проекции и не даст решения. Точка *4* является точкой пересечения горизонтальных следов грани *ASC* и секущей плоскости. Соединив полученные точки прямыми и выделив на фронтальной проекции невидимый участок *e'f'* сечения, закончим построение.



а



б

Рис. 56. Пересечение пирамиды плоскостью общего положения: **а** – модель; **б** – эпюр

Подобную задачу можно решить и другим способом, преобразовав плоскость общего положения в проецирующую и приведя тем самым задачу к виду, изображенному на рис. 54.

Рассмотрим типовые задачи на пересечение многогранников (призмы и пирамиды) плоскостями частного положения

Пример 1. Построить натуральную величину сечения пятиугольной призмы фронтально проецирующей плоскостью. Фигура сечения прямой пятиугольной призмы фронтально проецирующей плоскостью $f''_{0\alpha}$ (рис. 57) представляет собой плоский пятиугольник *12345*.

Для построения проекций фигуры сечения находят проекции точек пересечения плоскости $f''_{0\alpha}$ с ребрами призмы и соединяют их прямыми линиями. Фронтальные проекции этих точек получаются при пересечении фронтальных проекций ребер призмы с фронтальным следом $f''_{0\alpha}$ секущей плоскости *a''* (точки *1''—5''*).

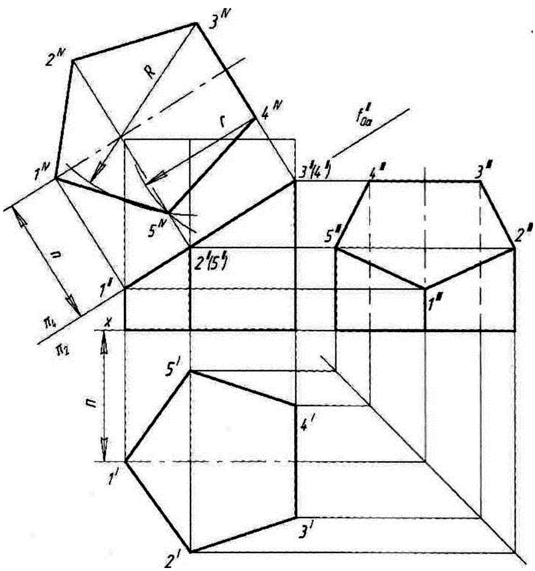


Рис. 57. Сечение призмы фронтально проецирующей плоскостью

Горизонтальные проекции точек пересечения *1'—5'* совпадают с горизонтальными проекциями ребер. Имея две проекции этих точек, с помощью линий связи находят профильные проекции *1'''—5'''*. Полученные точки *1'''—5'''* соединяют прямыми линиями и получают профильную проекцию фигуры сечения.

Действительный вид фигуры сечения определен способом замены плоскостей проекций. В данном примере горизонтальная плоскость проекций заменена новой π_4, причем ось π_2/π_4 (для упрощения построений) совпадает с фронтальным следом плоскости $f''_{0\alpha}$.

Пример 2. Построить натуральную величину сечения шестиугольной пирамиды фронтально проецирующей плоскостью.

Правильная шестиугольная пирамида, пересеченная фронтально проецирующей плоскостью $f''_{0\alpha}$, показана на рис. 58.

Фронтальная проекция сечения совпадает с фронтальным следом $f''_{0\alpha}$ плоскости. Горизонтальную и профильную проекции фигуры сечения строят по точкам, которые являются точками пересечения плоскости $f''_{0\alpha}$ с ребрами пирамиды. Действительный вид фигуры сечения в этом примере находят способом перемены плоскостей проекций.

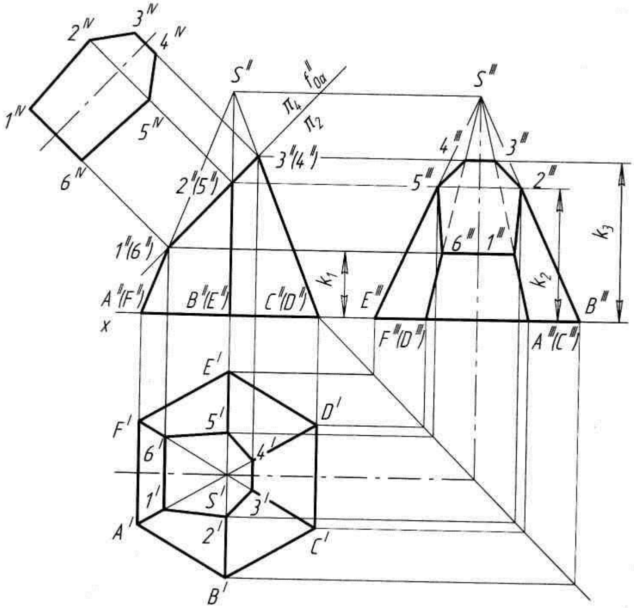
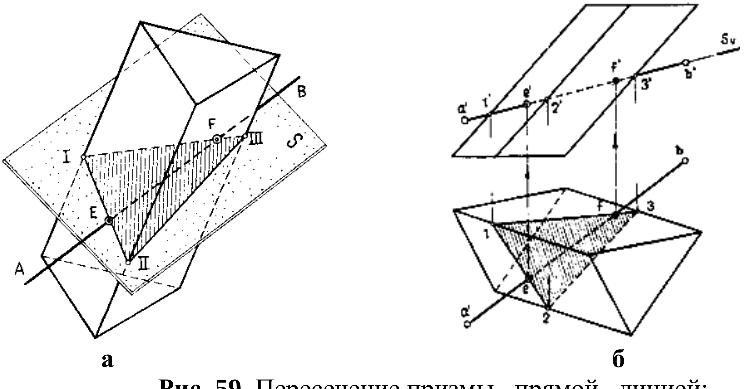


Рис. 58. Сечение пирамиды фронтально проецирующей плоскостью

Пересечение прямой линии с многогранником. Задача определения точек пересечения прямой с поверхностью многогранника решается аналогично пересечению прямой с плоскостью. Если многогранник выпуклый, точек пересечения две.

Эта задача решается в три этапа (рис. 59):

1) через данную прямую проводят вспомогательную секущую плоскость;
2) строят линию пересечения многогранника секущей плоскостью;
3) определяют точки пересечения данной прямой с контуром сечения.



а **б**

Рис. 59. Пересечение призмы прямой линией:
а - модель; **б –** эпюр

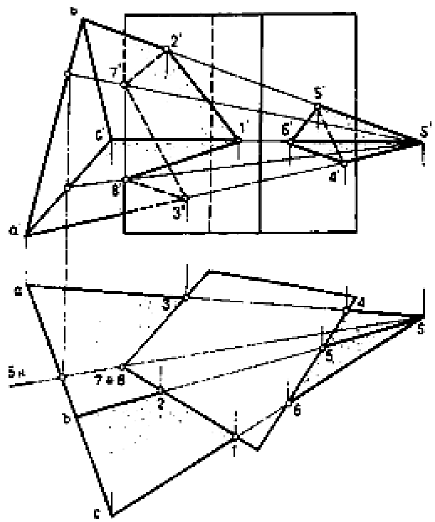


Рис. 60. Взаимное пересечение пирамиды с призмой

Полученные точки проецируют на другую плоскость проекций *(e', f')*, определяют видимость точек пересечения и участков прямой (отрезок прямой *e'—3'* невидимый). *Точки пересечения прямой с поверхностью многогранника называются точками встречи.*

Взаимное пересечение многогранников. Линия пересечения двух многогранников представляет собой одну или две замкнутые ломаные линии. Отрезки ломаной линии являются линиями пересечения граней, а точки излома — точками пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. *Если один многогранник частично пересекается другим, то линия пересечения будет представлять собой одну замкнутую ломаную линию, то такое пересечение называют неполным. Если один многогранник полностью пересекается другим, то пересечение называют* полным, *при этом линия пересечения состоит из двух замкнутых ломаных линий.*

Пересечение пирамиды с прямой призмой (рис. 60). Боковые ребра призмы проецируются в точки, а боковые ее грани являются горизонтально проецирующими отсеками плоскостей. Как это было ранее (см. рис. 54 и 55), следует выделить частный случай пересечения, когда одна проекция линии пересечения многогранников известна.

Точки пересечения ребер пирамиды с призмой легко определяются на горизонтальной проекции. С помощью линий связи строят фронтальные проекции этих точек. Из вертикальных ребер призмы лишь одно ребро пересекает пирамиду. Точки пересечения этого ребра с гранями пирамиды определяют, проводя вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость S_H через ребро и вершину пирамиды. Она пересекает грани пирамиды по прямым, которые пересекают ребро призмы в точках *7,7'* и *8,8'*. Соединяют построенные проекции точек отрезками прямых в пределах каждой грани, при этом следует руководствоваться горизонтальной проекцией. Линия пересечения представляет собой две замкнутые ломаные линии. Пересечение полное. Видимыми являются те участки линии пересечения, которые принадлежат видимым граням многогранников.

Пересечение двух пирамид. Если пересекаются многогранники, у которых пересекающиеся грани не являются проецирующими, линию пересечения строят с помощью вспомогательных проецирующих плоскостей, определяя точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого, и наоборот. Однако в некоторых случаях, когда пересекающиеся многогранники расположены своими основаниями на горизонтальной плоскости проекций, применение плоскостей общего положения в качестве вспомогательных оказывается более рациональным и дает меньше дополнительных построений.

На рис. 61 приведен подобный пример. Через вершины пирамид проведена прямая и найден ее след *M* на плоскости оснований пирамид. Вспомогательные плоскости, проведенные через прямую *ST*, пересекают грани по прямым линиям. Следы этих плоскостей проходят через точку *m*. Вспомогательные плоскости образуют «пучок» плоскостей, осью которого является прямая *SM*, соединяющая вершины многогранников.

Находят точки пересечения ребра *CT* с гранями пирамиды. Проводят вспомогательную плоскость *P* через данное ребро и вершину *S*. Горизонтальный след этой плоскости должен пройти через точку *c* — горизонтальный след ребра *CT*. Вспомогательная плоскость пересечет стороны основания другой пирамиды в точках *1* и *2*, а ее грани — по прямым *s1 s2*, в пересечении с которыми и определяют горизонтальные проекции точек пересечения ребра *CT* с пирамидой. Вторую вспомогательную плоскость *Q* проводят через ребро *BT* и строят точки пересечения аналогичным образом. Отрезки линии пересечения пирамид проводят из точек пересечения вспомогательными плоскостями сторон оснований пирамид в пределах каждой пары пересекающихся граней. Третье ребро *AT* не пересекается с пирамидой *EFDS*. Полученные горизонтальные проекции точек и линий пересечения проецируют на фронтальную проекцию пирамид, выделяя невидимые участки линии пересечения.

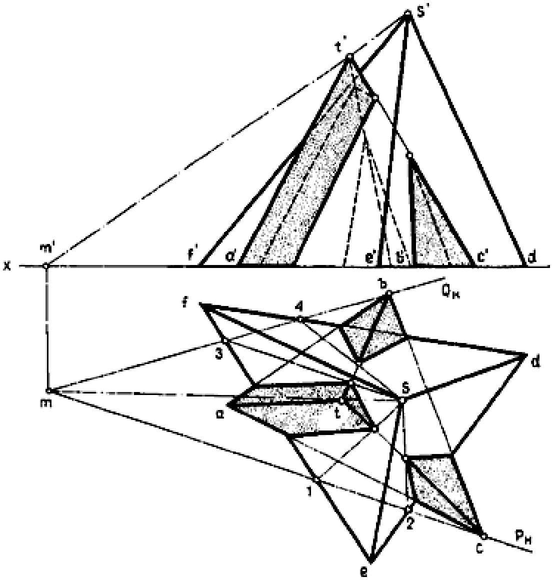


Рис. 61. Взаимное пересечение двух пирамид

Тема 7

КРИВЫЕ ЛИНИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ. ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ. МЕТОД СФЕР

Кривые линии в начертательной геометрии рассматриваются как непрерывная совокупность последовательных положений движущейся точки, а также как линия пересечения поверхностей.

Кривые линии могут быть плоскими и пространственными (линиями двоякой кривизны). *Если все точки кривой линии лежат в одной плоскости, то такая кривая называется плоской.* Примером могут служить окружность, эллипс, парабола. *Если кривая не лежит всеми своими точками в плоскости, то она называется пространственной,* например винтовые линии. Кривые линии подразделяются и по другим признакам.

Кривая может быть задана *аналитически,* т. е. уравнением, например эллипс, парабола и др. Если образование кривой не имеет строгой закономерности, то она задается *графически,* например горизонтали на плане местности, т.е. имеет случайный вид.

Степень уравнения, которое выражает алгебраическую кривую, определяет порядок кривой. Геометрически порядок плоской кривой определяется числом точек ее пересечения прямой линией (как действительных, так и мнимых). Порядок пространственной кривой определяется числом точек пересечения кривой с плоскостью.

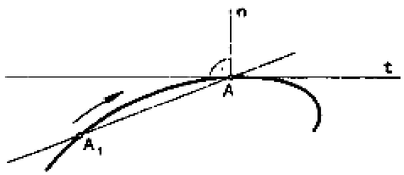
В начертательной геометрии кривые линии изучаются по их проекциям.

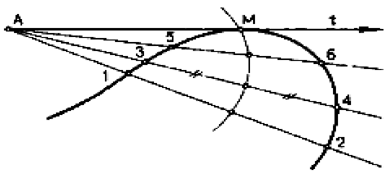
Для того чтобы получить проекцию кривой линии, надо спроецировать на плоскость проекций ряд принадлежащих ей точек, а для определения длины какого-либо участка ее надо вписать в эту кривую ломаную линию и определить длину каждого ее звена.

Плоские кривые. Наиболее распространенными являются плоские кривые линии. Для исследования локальных свойств плоской кривой строят в некоторой точке касательную и нормаль.

Касательной к плоской кривой в некоторой ее точке называется предельное положение секущей, когда две общие с кривой точки сечения, стремясь друг к другу, совпадут (рис. 62 а). Касательная определяет направление движения точки по кривой. *Нормалью называется прямая, лежащая в плоскости кривой и перпендикулярная касательной в точке ее касания.*

При решении некоторых задач приходится проводить касательную к кривой. На рис. 62 б приводится прием построения касательной к кривой из точки, заданной вне кривой с помощью «кривой ошибок». Применение этого приема основано на том положении, что в искомой или заданной точке касания M длина хорды кривой равна нулю. Требуется провести через точку A касательную t к кривой случайного вида. Для этого проведем через точку A пучок прямых, пересекающих кривую. Полученные хорды делят пополам. Плавная кривая, проведенная через средние точки («кривая ошибок»), в пересечении с заданной кривой определит искомую точку касания *M*.





а **б**

Рис. 62. Касательная кривая к плоской: **а** – построение нормали; **б** – построение касательной с помощью «кривой ошибок»

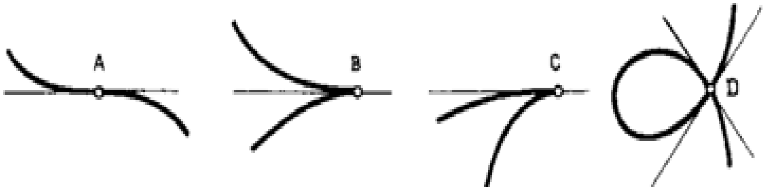


Рис. 63. Особые точки кривой

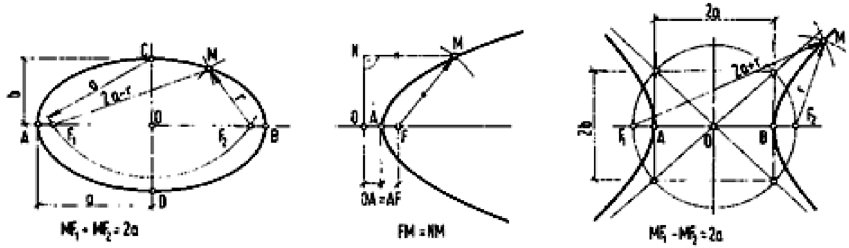
Свойства точек кривой. Точка кривой, в которой можно провести единственную касательную, называется *гладкой.* Кривая, состоящая только из одних гладких точек, называется *гладкой кривой.* Точка кривой называется *обыкновенной,* если при движении точки по кривой направление ее движения и направление поворота касательной не изменяются. Точки, не отвечающие этим требованиям, называются *особыми.*

На рис. 636 изображены особые точки кривой: точка *перегиба A* — касательная пересекает кривую; точка *возврата первого рода B;* точка *возврата второго рода C;* точка *излома D* — кривая в этой точке имеет две касательные.

Проекции плоских кривых. Важное прикладное значение имеют некоторые кривые второго порядка — эллипс, парабола, гипербола.

Эллипс (замкнутая кривая с двумя осями симметрии и центром) представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (рис. 64 а). Эллипс можно построить по точкам исходя из его определения. Из точки *C* радиусом *a* проводят дугу, которая пересекает большую ось эллипса в точках F_1 и F_2 — фокусах. Затем из фокусов проводят дуги окружностей радиусами *r* и *2a — r*. Точки пересечения дуг принадлежат кривой эллипса.

Построение эллипса помимо способа, показанного на рис. 64 а, в вузах рекомендуют выполнять по восьми точкам: четыре точки — концы сопряженных диаметров и четыре точки — пересечения кривой эллипса с диагоналями параллелограмма.



а **б** **в**

Рис. 64. Плоские кривые: **а** – эллипс; **б** – парабола; **в** – гипербола

Парабола (незамкнутая кривая с одной осью симметрии) представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки (фокуса) и прямой (рис. 64 б). Параболу можно построить по точкам исходя из ее определения, если заданы фокус *F* и прямая *ON* — директриса. Вершина *A* параболы делит пополам расстояние между фокусом и директрисой.

Гипербола (кривая, состоящая из двух ветвей, с двумя осями симметрии и центром) представляет собой геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (рис. 64 в). Две прямые линии, проходящие через центр *O* и касающиеся гиперболы в бесконечно удаленных точках, называют асимптотами гиперболы. Асимптоты направлены по диагоналям прямоугольника со сторонами *2a* и *2b*. Гиперболу, как и параболу, можно построить по точкам.

Окружность — самая распространенная кривая, при параллельном проецировании она преобразуется в эллипс.

Пространственные кривые. Пространственные кривые линии могут иметь самую разнообразную форму. Они могут быть заданы аналитически. Кривые случайного вида задаются графически. Для анализа пространственной кривой необходимо установить самые общие ее свойства, которые изучаются по ее проекциям.

Для задания на чертеже пространственной кривой линии и точек, принадлежащих ей, достаточно двух ее проекций — горизонтальной и фронтальной. Однако более глубокие локальные свойства пространственной кривой в окрестности любой ее точки исследуются с помощью проекций на гранях так называемого *сопровождающего трехгранника,* который неизменно связан с движущейся по кривой точкой.

Проекции пространственных кривых. Наибольшее применение в практике архитектурного проектирования и в технических формах имеют закономерные пространственные кривые, в частности винтовые линии (цилиндрические и конические). Винтовая линия образуется двойным движением точки — поступательным и вращательным.

Цилиндрическая винтовая линия — это путь точки, равномерно движущейся вдоль образующей цилиндра, которая, в свою очередь, с постоянной угловой скоростью перемещается вокруг оси цилиндра (рис. 65).

Фронтальная проекция цилиндрической винтовой линии представляет собой *синусоиду*, горизонтальной — окружность. Смещение точки вдоль образующей за один оборот называется *шагом* h винтовой линии. При развертывании цилиндрической поверхности в плоскость цилиндрическая винтовая линия изобразится прямой линией. Угол ψ, составленный касательной к винтовой линии с плоскостью, перпендикулярной оси, называется *углом подъема* винтовой линии.

Видимая часть винтовой линии имеет подъем в правую строну (подъем винтовой линии осуществляется против часовой стрелки) — это правая винтовая линия, если же наоборот — левая.

Путь, пройденный точкой за один оборот образующей вокруг оси цилиндра, называется *витком винтовой линии.* Кроме этого, цилиндрическая винтовая линия характеризуется еще ходом, шагом и углом подъема.

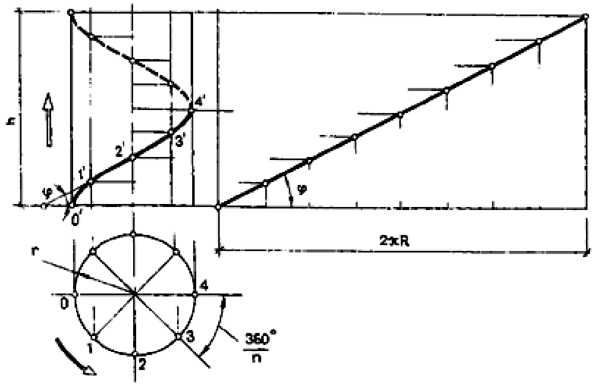


Рис. 65. Построение проекций цилиндрической винтовой линии

Винтовые линии могут быть одноходовыми и многоходовыми. Чтобы получить многоходовую винтовую линию, надо заданный ход ее разделить на соответствующее число равных частей и от точек деления построить на цилиндре винтовые линии того же хода.

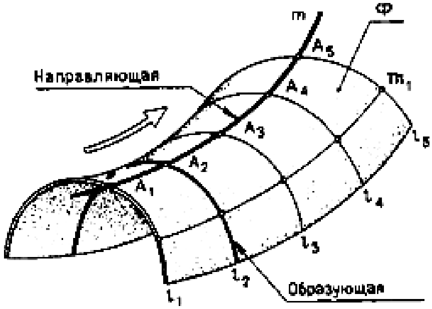


Рис. 66. Образование кривых поверхностей

Для того чтобы получить проекцию кривой линии, надо спроецировать на плоскость проекций ряд принадлежащих ей точек, а для определения длины какого-либо участка ее надо вписать в эту кривую ломаную линию и определить длину каждого ее звена. На рис. 65 справа представлена развертка цилиндрической винтовой линии.

Кривые поверхности. *В начертательной геометрии поверхность рассматривается как непрерывное множество последовательных положений линии, перемещающейся в простран-*

стве по определенному закону (рис. 66). Такой способ образования поверхностей называют кинематическим.

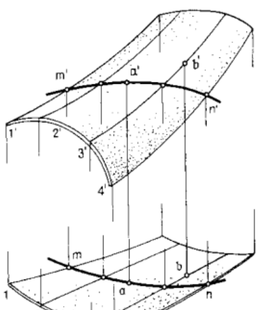
Если направляющей является линия, подчиненная какому-либо закону, полученная при этом поверхность будет закономерной, в противном случае — случайной.

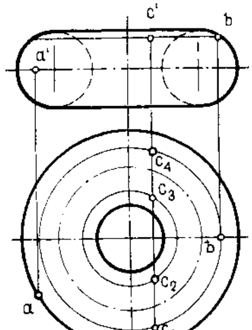
Линию l, которая при своем движении образует поверхность, называют образующей. Образующая может перемещаться по какой-либо другой неподвижной линии m, называемой направляющей. Поскольку образующая и направляющая могут иметь самую различную форму, то и поверхностей может быть образовано бесчисленное множество. Вместе с тем форма и закон перемещения образующей единственным образом определяют вид кривой поверхности.

Определитель и каркас поверхности. При движении образующей каждая ее точка описывает в пространстве некоторую линию m_1. Таким образом, вся поверхность окажется покрытой сетью линий, состоящей из двух семейств: семейства образующих l_1, l_2, ... и семейства линий m, m_1 ...., описываемых отдельными точками образующей. Каждая линия одного семейства пересекает все линии второго семейства. Для изображения на чертеже выделяют некоторое количество линий, которые образуют *линейный каркас* поверхности.

Если закон движения образующей и ее форма определенным образом заданы, то поверхность в начертательной геометрии определяют не каркасом, а образующей и условиями ее перемещения. При этом чертеж поверхности должен быть таким, чтобы на нем можно было выделить и построить любую линию и точку, принадлежащие поверхности.

Совокупность геометрических элементов и условий, необходимых и достаточных для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже, называют определителем кинематической поверхности.





а б

Рис. 67. Построение точки, принадлежащей поверхности

Из сказанного выше можно сделать следующий вывод: поверхность считается заданной, если относительно любой точки пространства однозначно решается вопрос о принадлежности ее к данной поверхности.

Точка принадлежит поверхности, если она лежит на линии этой поверхности.

Чтобы по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, построить вторую ее проекцию (рис. 67 а), необходимо построить каркас поверхности *I* — *II* — *III* — *IV*, провести через заданную проекцию точки, например, a', вспомогательную линию m' — n', принадлежащую поверхности, а затем построить вторую проекцию вспомогательной линии m — n и проекцию искомой точки a. Если образующая каркаса совпадает с заданной проекцией точки b, построение второй проекции упрощается.

Чтобы построить горизонтальную проекцию произвольной точки C (рис. 67 б), принадлежащей *поверхности вращения,* необходимо провести через фронтальную проекцию c' вспомогательную параллель поверхности. Затем, построив горизонтальную проекцию параллели (окружность), определить на ней горизонтальную проекцию точки c. Как следует из приведенного построения, фронтальной проекции точки c' на горизонтальной проекции может соответствовать любая из четырех проекций точек c_1 и c_4, лежащих на параллели внешней части поверхности, или c_2 и c_3, лежащих на параллели внутренней части поверхности. Точка A лежит на экваторе поверхности, точка B — на главном меридиане.

Чтобы придать чертежу поверхности наглядность, строят ее очертание — проекцию линии контура поверхности (рис. 68).

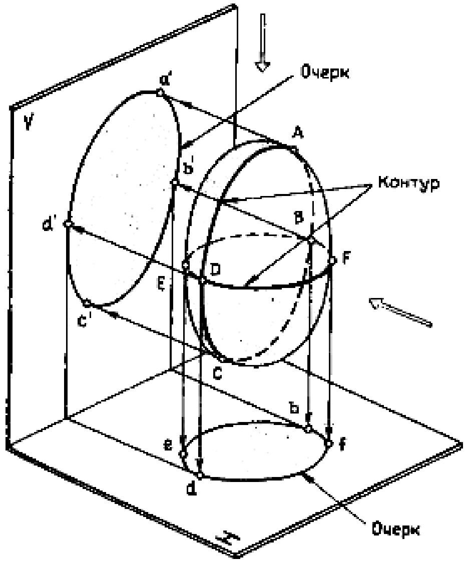


Рис. 68. Очертание поверхности

Контуром или контуром видимости поверхности называется линия, точки которой являются точками касания проецирующих прямых. Проекция контура на плоскости проекций называется очертанием или очерком поверхности на данной плоскости (рис. 68). При изображении поверхности на чертеже проекцию контурной линии называют линией видимости, которая является границей, отделяющей видимую часть поверхности от скрытой, невидимой части на данной плоскости проекций.

Классификация поверхностей. Из большого числа возможных способов образования поверхностей рассмотрим основные способы, выделив главные признаки их классификации.

1. *По закону движения образующей* — поверхности с поступательным, с вращательным и винтовым движением образующей.

2. *По виду образующей* различают поверхности с прямолинейной образующей — линейчатые и с криволинейной — нелинейчатые.

3. *По закону изменения формы оразующей* — с образующей постоянного или переменного вида.

4. *По признаку развертывания поверхности на плоскость* — развертываемые и неразвертываемые.

5. *По способу задания поверхности*— аналитические или графические.

6. *По дифференциальным свойствам* — гладкие или негладкие поверхности и по признаку кривизны поверхности.

Необходимо отметить, что одни и те же поверхности могут быть классифицированы по различным признакам. Поэтому в качестве *основного признака* выделим вид образующей и характер ее перемещения, т. е. *кинематический признак образования поверхностей*.

Закон перемещения удобно задавать неподвижными линиями — направляющими, которые должна пересекать движущаяся образующая.

Классификация кривых поверхностей представлена на рис. 69 и далее более подробно будут рассмотрены подклассы линейчатых и нелинейчатых поверхностей.

По виду образующей поверхности могут быть подразделены на две большие группы: линейчатые — образующей является прямая линия и нелинейчатые — образующей является кривая линия.

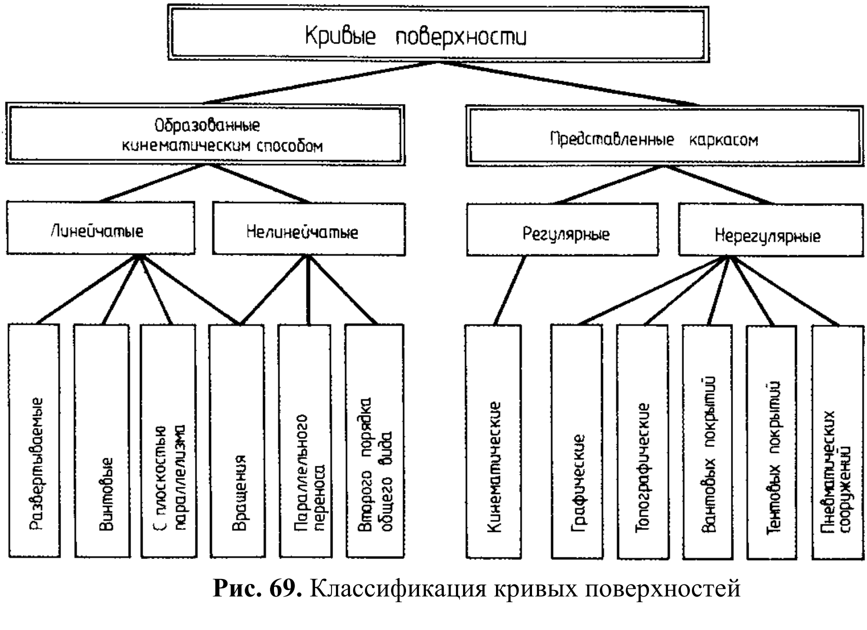


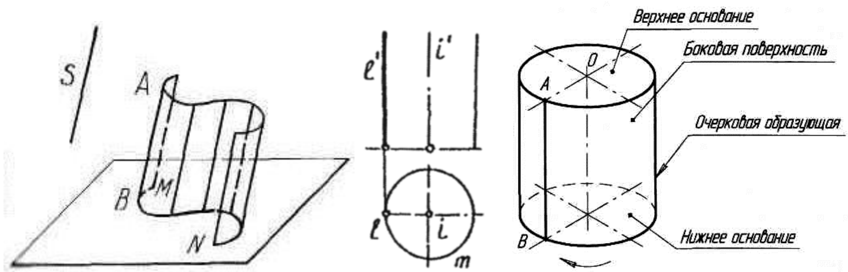
Рис. 69. Классификация кривых поверхностей

Линейчатые поверхности в свою очередь делятся на развертывающиеся, т. е. такие, которые могут быть совмещены с плоскостью, не претерпев при этом никаких повреждений (складок, разрывов), и неразвертывающиеся (косые).

Наиболее распространенными из линейчатых развертывающихся поверхностей являются цилиндрическая и коническая.

Цилиндрическая поверхность (рис. 70а) — это поверхность, образуемая прямой линией (образующей *AB),* перемещающейся в пространстве по некоторой неподвижной кривой (направляющей *MN),* оставаясь параллельной заданному направлению *S*.

Цилиндрическая поверхность на эпюре может быть определена проекциями одной из образующих и направляющей, так как этого вполне достаточно, чтобы построить на этой поверхности любую образующую или любую точку (рис. 70б).



а **б**

Рис. 70. Цилиндрическая поверхность

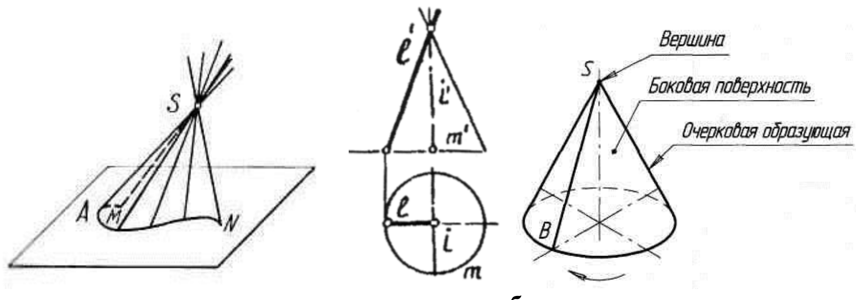
Если в сечении цилиндрической поверхности плоскостью, перпендикулярной к ее образующим (в нормальном сечении), получается круг, цилиндрическая поверхность называется *круговой* (рис. 70 б), если эллипс, — *эллиптической,* если парабола,— *параболической* и т. д. На рис. 70 а изображена цилиндрическая поверхность общего вида — нормальным сечением ее является кривая неопределенного вида.

Часть цилиндрической поверхности, ограниченная двумя плоскими параллельными сечениями, называется *цилиндром.* Если основанием цилиндра является его нормальное сечение, цилиндр *прямой,* если какое-либо наклонное — *наклонный.*

Коническая поверхность (рис. 71 а) — это поверхность, образуемая движением прямой линии *(SA)* по некоторой кривой *(MN)* и проходящей во всех своих положениях через неподвижную точку *(S)*, называемую *вершиной конической поверхности.*

Часть конической поверхности, ограниченная вершиной и плоскостью, пересекающей все ее образующие, называется *конусом.* Если основанием конуса является нормальное сечение, конус *прямой,* во всех остальных случаях — *наклонный.*

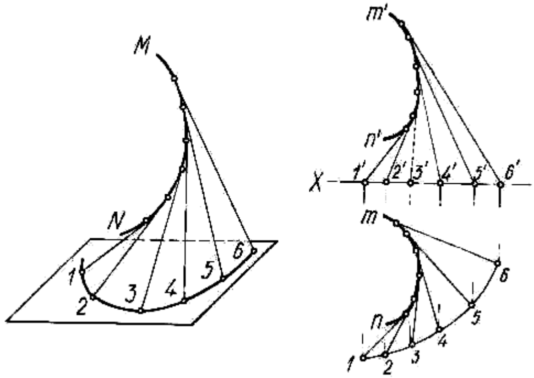
На эпюре коническая поверхность полностью будет определена проекциями одной направляющей и вершины (рис. 71 б).



а **б**

Рис. 71. Коническая поверхность

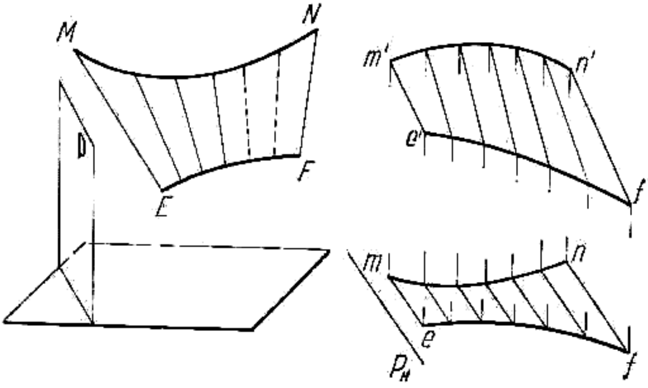
К числу линейчатых развертывающихся поверхностей относятся также *поверхности с ребром возврата.* Они образуются перемещением прямой линии по некоторой пространственной кривой, причем образующая прямая остается все время касательной к направляющей (рис.72 а). При продлении касательных в противоположную сторону от точек касания (точек *1, 2, 3, 4, 5)* будет образована вторая полость поверхности. Границей же между первой и второй полостями будет являться направляющая кривая *MN* , называемая *ребром возврата.* Эпюр некоторой поверхности с ребром возврата приведен на рис. 72 б.



а **б**

Рис. 72. Поверхность с ребром возврата

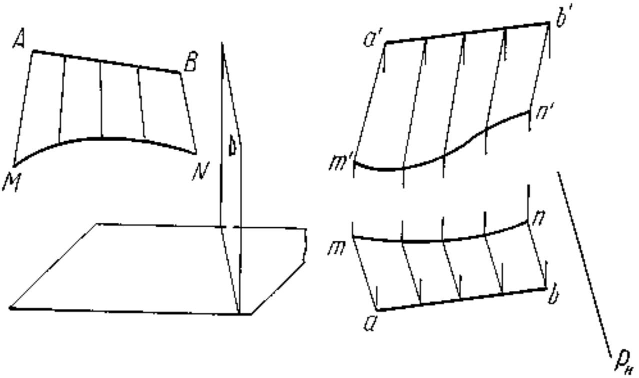
Из *линейчатых неразвертывающихся поверхностей* следует в первую очередь отметить цилиндроиды – *поверхности с плоскостью параллелизма,* т. е. поверхности, образуемые движением прямой, скользящей по двум кривым направляющим, не лежащим в одной плоскости, и остающейся все время параллельной некоторой заданной плоскости *(P),* называемой плоскостью *параллелизма* (рис. 73 а). Эпюр цилиндроида приведен на рис. 73 б.



а **б**

Рис. 73. Цилиндроид: **а –** модель; **б –** эпюр

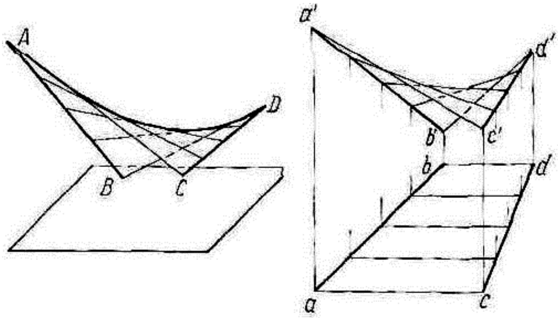
Если одной из направляющих цилиндроида является прямая линия, образуется новая линейчатая неразвертывающаяся поверхность с плоскостью параллелизма, называемая *коноидом* (рис. 74).



а **б**

Рис. 74. Коноид: **а –** модель; **б –** эпюр

Если же обе направляющие цилиндроида заменить прямыми линиями (скрещивающимися), то образуется линейчатая неразвертывающаяся поверхность с плоскостью параллелизма — *косая плоскость, или линейчатый параболоид, или гиперболический параболоид* (рис. 75).

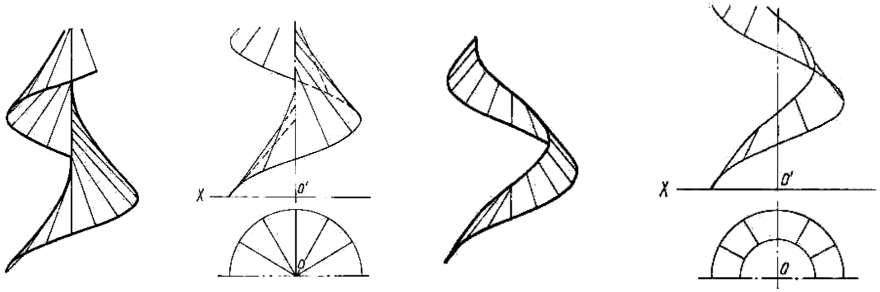


а б

Рис. 75. Косая плоскость, или линейчатый параболоид, или гиперболический параболоид: **а –** модель; **б –** эпюр

Большую группу линейчатых неразвертывающихся поверхностей составляют *винтовые поверхности (гелисоиды, или геликоиды)*, имеющие широкое применение в технике. *Винтовые поверхности — это такие поверхности, у которых хотя бы одна направляющая — винтовая линия.*

Если прямая линия (образующая) перемещается в пространстве, пересекая винтовую линию и ее ось (направляющие), то винтовую поверхность называют *гелисоидом*. Если угол между прямой линией и осью винтовой линии остается постоянным и неравным 90°, образуется поверхность, называемая *косым (или наклонным) гелисоидом* (рис. 76).



а б

Рис. 76. Гелисоид: **а –** косой; **б -** косой кольцевой

В том случае, когда угол между образующей косого гелисоида и осью винтовой линии постоянен и равен 90°, получается *прямой гелисоид, или винтовой коноид.*

На рис.76 б показана поверхность, называемая *косым кольцевым гелисоидом.* Она образуется прямой линией, которая, перемещаясь в пространстве, пересекает две соосные винтовые линии одинакового шага. Причем угол между образующей и осью винтовых линий должен быть постоянным и не равным 90°.

Если же этот угол постоянен и не равен 90°, поверхность называется *винтовым цилиндроидом.*

К нелинейчатым относится также большая группа поверхностей, которые могут быть получены вращением некоторой кривой линии вокруг неподвижной прямой — оси поверхности, т. е. *поверхностей вращения.* К поверхностям вращения могут быть отнесены также рассмотренные ранее прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус. Но это поверхности вращения с прямолинейными образующими, т. е. линейчатые поверхности вращения.

При образовании поверхностей вращения каждая точка их образующих перемещается по окружности, перпендикулярной к оси вращения (рис.77). Эти окружности называются *параллелями,* а наибольшая из них — *экватором.* Осевая плоскость называется *меридиональной,* а линия ее пересечения с поверхностью — *меридианом.*

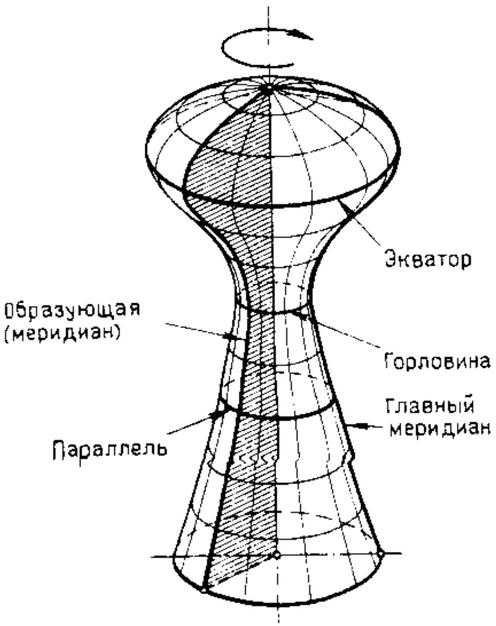


Рис. 77. Поверхность вращения

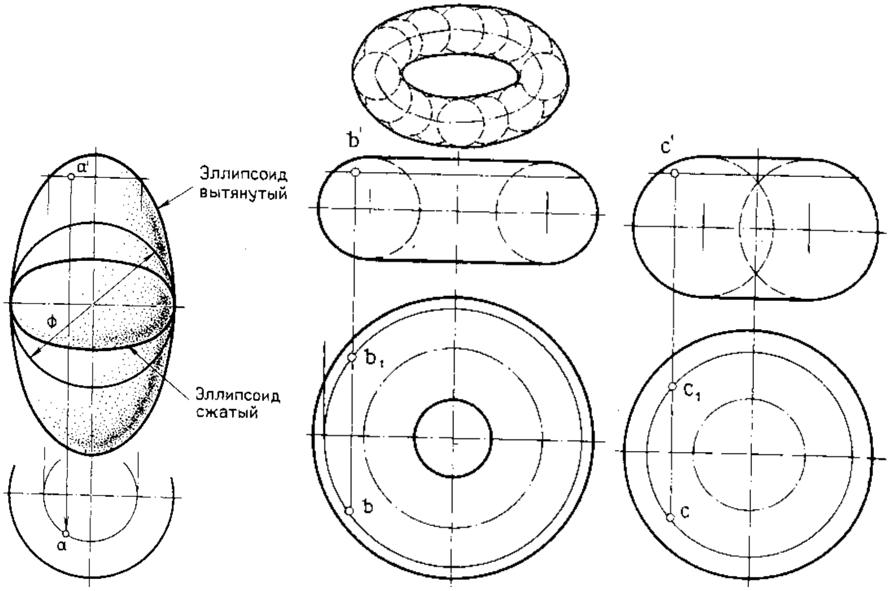
Вид поверхности вращения зависит от формы образующей и ее положения относительно оси вращения. Рассмотрим поверхности вращения, образованные вращением кривой линии.

Сферическая поверхность (шар) — это поверхность, образуемая вращением окружности вокруг ее диаметра

Эллипсоид вращения — это поверхность, образуемая вращением эллипса вокруг его большой (вытянутый эллипсоид вращения) или малой (сжатый эллипсоид вращения) оси (рис.78 а).

Тор (круговое кольцо) — поверхность, образуемая вращением окружности вокруг оси, лежащей с ней в одной плоскости и ее не пересекающей (рис.78 б, в). Если окружность не пересекает ось вращения, поверхность называют *открытым тором, или кольцом.* Если ось касается окружности, то поверхность называют *закрытым тором*, а если ось пересекает окружность, тор называют самопересекающимся.

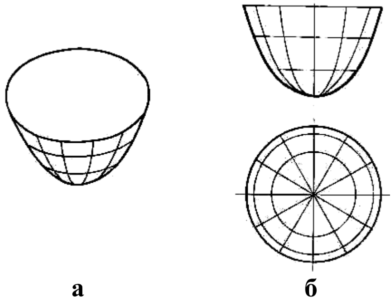
В общем виде *торовая поверхность* — это поверхность, образуемая вращением окружности (или ее дуги) вокруг оси, расположенной с нею в одной плоскости, но не проходящей через ее центр.



а **б** **в**

Рис. 78. Поверхности вращения: **а –** эллипсоид вращения; **б –** открытый тор; **в –** закрытый тор

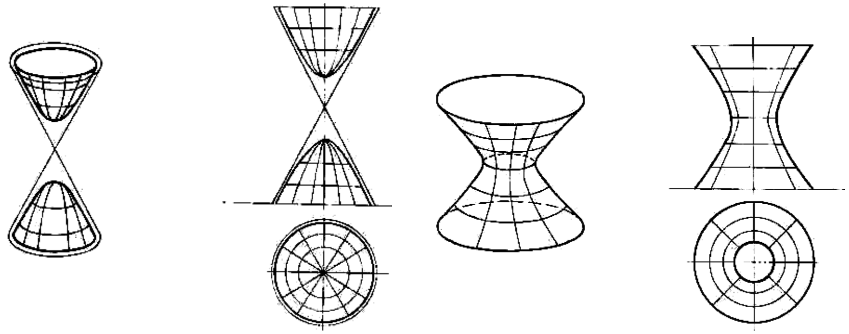
Параболоид вращения (рис. 79) — поверхность, образуемая вращением параболы вокруг ее оси (меридиан поверхности – парабола).



а **б**

Рис. 79. Параболоид вращения: **а –** модель; **б –** эпюр

Двуполостной гиперболоид вращения (рис.80 а) — поверхность, образуемая вращением гиперболы вокруг ее действительной оси.



а **б**

Рис. 80. Гиперболоиды вращения: **а –** двуполостной; **б –** однополостной

Однополостной гиперболоид вращения (рис. 80 б) — поверхность, образуемая вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

Поверхностью второго порядка общего вида называют поверхность, которую можно выразить алгебраическим уравнением второй степени в пространственной системе координат. К поверхностям второго порядка общего вида относятся: трехосный эллипсоид, однополостный и двуполостный эллиптические гиперболоиды, гиперболический параболоид.

Касательная плоскость, нормаль, кривизна поверхности. Построение касательной плоскости к поверхности представляет частный случай пересечения поверхности плоскостью.

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке называют плоскость, содержащую множество прямолинейных касательных, проведенных к кривым, проходящим через данную точку. Плоскость может касаться поверхности в точке, если поверхность выпуклая (рис.81 а), и по прямой линии, если поверхность линейчатая развертываемая, например цилиндр или конус вращения. Плоскость, касаясь вогнутой поверхности в точке, может одновременно пересекать ее, например поверхность однополостного гиперболоида вращения (рис.81 б). Если в какой-либо точке поверхности можно провести касательную плоскость, точка называется *обыкновенной,* а если несколько касательных плоскостей, точка называется *особой.*

Понятие о кривизне поверхности. При исследовании свойств поверхности, связанных с ее формой, касательная плоскость играет важную роль.

Касательная плоскость P к поверхности Φ в точке M определяется двумя касательными t_1 и t_2, проведенными к двум кривым линиям l_1, и l_2 поверхности, проходящим через точку M (см. рис.81 а).

В дифференциальной геометрии доказывается, что касательные t_1 и t_2 к двум кривым, проведенным на поверхности через точку M и имеющим экстремальные значения кривизны (максимальную и минимальную), образуют между собой прямой угол и являются так называемыми *главными направлениями.*

Максимальный и минимальный радиусы кривизны линий в точке касания M называются *главными радиусами* R_1 и R_2 кривизны поверхности в данной точке M, а их центры — *центрами кривизны* поверхности в рассматриваемой точке. Величины, обратные главным радиусам кривизны $K_1=l/R_1$ и $K_2=l/R_2$, называются *главными кривизнами* поверхности в данной точке. Главные кривизны имеют одинаковые знаки, если главные радиусы кривизны R_1 и R_2 направлены в одну сторону, и разные знаки, если главные радиусы кривизны направлены в противоположные стороны.

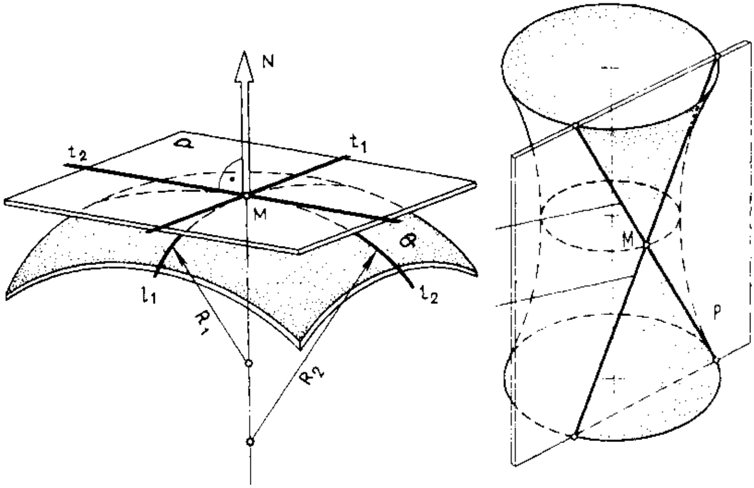


Рис. 81. Построение касательной: **а –** к выпуклой поверхности;
б - к вогнутой поверхности

Кривизна поверхности характеризуется полной или гауссовой кривизной. *Полной или гауссовой кривизной К* поверхности в данной точке называется произведение главных кривизн в рассматриваемой точке: $K = K_1 \cdot K_2 = l/R_1 \cdot l/R_2$.

Рассмотрим три случая касания плоскости к поверхности и кривизну поверхности в окрестности точки касания.

1. Касательная плоскость может иметь с поверхностью одну точку касания М (рис.81 а, 82 а). В этом случае все линии поверхности, пересекающиеся в данной точке, находятся по одну сторону касательной плоскости. При этом, если соприкасающийся параболоид в рассматриваемой точке является эллиптическим, то эту точку называют *эллиптической.* Поверхности, состоящие только из эллиптических точек, например эллипсоид и параболоид вращения, называют *выпуклыми.*

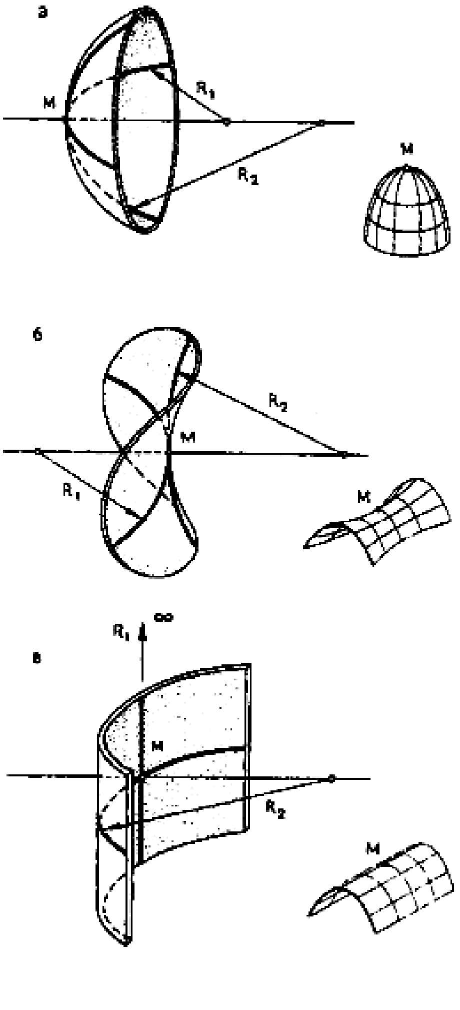


Рис. 82. Случаи касания плоскостью поверхностей

Главные кривизны имеют одинаковые знаки, так как главные радиусы кривизны R_1 и R_2 направлены в одну сторону; в этом случае полная гауссова кривизна $K > 0$. Поверхности этого вида называют поверхностями *положительной* кривизны, имеющей переменный характер. Поверхностью постоянной положительной кривизны является только сфера.

2. Касательная плоскость к поверхности в данной точке M может пересекать поверхность по двум прямым линиям. Так, например, в случае дважды линейчатой поверхности — гиперболического параболоида или однополостного гиперболоида вращения (см. рис. 82 б) касательная плоскость пересекает эти поверхности по двум прямым образующим l_1 и l_2, которые, вместе с тем, являются их касательными t_1 и t_2, определяющими касательную плоскость P.

Главные кривизны имеют разные знаки, так как главные радиусы кривизны R_1 и R_2 направлены в противоположные стороны (см. рис. 82 б). Полная гауссова кривизна $K < 0$. Поверхности этого вида называют поверхностями *отрицательной* кривизны, имеющей переменный характер.

3. Касательная плоскость касается поверхности по прямой образующей. Следовательно, все точки образующей имеют общую касательную плоскость (рис. 82 в).

Полная гауссова кривизна $K = O$. Так как один из радиусов R_1 бесконечно большой, то их произведение обратится в нуль независимо от величины другого радиуса. Поверхности этого вида называют поверхностями *нулевой кривизны.*

Построение плоскостей, касательных к поверхностям. Плоскости, касательные к поверхности, могут быть построены при различных исходных условиях. Касательная плоскость может быть проведена различными способами. Назовем некоторые из случаев, с которыми придется встретиться:

а) через точку, лежащую на *линейчатой* поверхности;

б) через точку, принадлежащую *нелинейчатой* поверхности вращения;

в) через точку, заданную вне поверхности;

г) параллельно прямой, заданной вне поверхности.

Пример. Построить плоскость, касательную к поверхности вращения (тору), в заданной на ней точке *K'* (рис. 83). Если точка задана одной проекцией, вторую проекцию определяют с помощью вспомогательной параллели (окружности), которую проводят на поверхности через данную точку. Через точку *K* проведены две прямые – *KH* и *KD,* задающие касательную плоскость. Одна из них касательна к проведенной параллели (она является горизонталью), а другая должна быть касательной к меридиану. Для построения этой касательной *KD* меридиан вращением совмещен с главным меридианом.

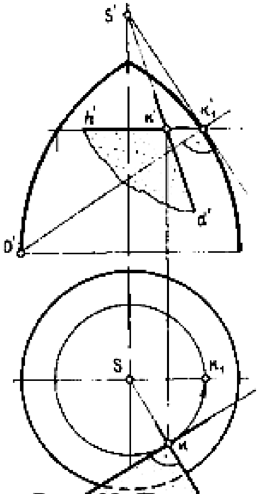
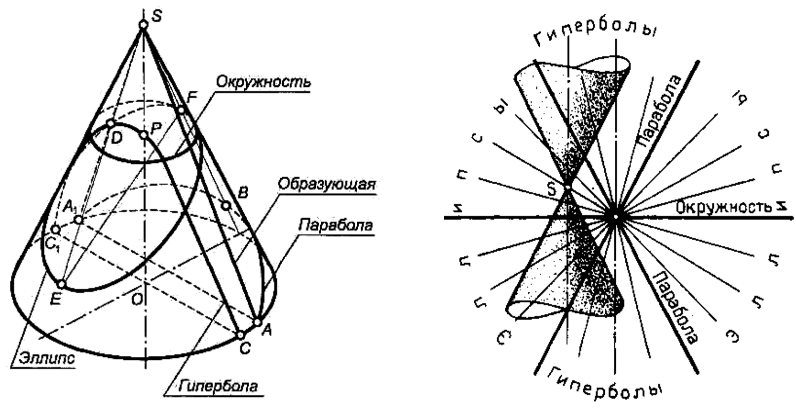


Рис. 83. Плоскость, касательная к тору

В этом положении к нему через точку *s'* проведена касательная под прямым углом к прямой $o'к'_1$. Точка *o'* является центром дуги окружности — главного меридиана тора. Касательную продолжают до пересечения с осью тора, а затем поворачивают в первоначальное положение. Две прямые – горизонталь *KH* и касательная *KD* – определяют искомую касательную плоскость.



а **б**

Рис. 84. Сечения конуса плоскостями

Пересечение поверхности вращения плоскостью. *Конические сечения.* В зависимости от расположения секущей плоскости по отношению к оси прямого кругового конуса могут образоваться: пересекающиеся прямые, окружность, эллипс, парабола и гипербола (рис. 84 а).

На рис 84 б приведена общая схема, наглядно показывающая скачкообразный характер видоизменений конических кривых и границы области образования той или иной кривой в зависимости от положения (наклона) секущей плоскости относительно конуса. Как видно из схемы, размеры этой области у окружности и параболы чрезвычайно малы — здесь и возникает качественный скачок, в то время как у эллипса и гиперболы размеры области, напротив, велики.

Построение линии пересечения поверхностей вращения плоскостью. Линия пересечения кривой поверхности плоскостью представляет собой плоскую кривую линию (сечение), для построения которой необходимо определить отдельные точки сечения и соединить их последовательно плавной кривой.

Чтобы построить линию пересечения *линейчатой поверхности вращения* плоскостью, необходимо определить точки пересечения отдельных образующих этой поверхности плоскостью. Таким образом, задача на определение линии пересечения линейчатой поверхности плоскостью сводится к многократному решению задачи на пересечение прямой с плоскостью.

Для построения точек линии пересечения *нелинейчатой* кривой поверхности плоскостью применяют основной способ — *способ вспомогательных секущих плоскостей.* Вспомогательные секущие плоскости проводят так, чтобы поверхность пересекалась по графически простым линиям. Точки пересечения этих линий будут искомыми точками линии пересечения.

Рассмотрим примеры построения линии пересечения поверхностей вращения плоскостью. При построении сечений следует выделить частный случай, когда секущая плоскость является проецирующей или пересекаемая поверхность занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций и одна проекция линии пересечения известна.

Пример. Построить пересечение конуса фронтально проецирующей плоскостью (рис. 85). Секущая плоскость является проецирующей, поэтому фронтальная проекция линии сечения совмещена с проецирующим следом плоскости P_v. Полученный в сечении эллипс проецируется на плоскость V отрезком прямой a' — b', который является большой осью эллипса. Горизонтальная проекция оси строится с помощью линий связи. Малая ось эллипса m — n перпендикулярна большой оси и делит ее пополам. Точки m и n строят с помощью параллели или двух образующих конуса. На чертеже построен действительный вид сечения конуса способом замены плоскостей проекций. Дополнительные точки сечения могут быть построены аналогично построению точек m и n.

Аналогично решается задача на построение линии пересечения прямого кругового цилиндра фронтально проецирующей плоскостью (рис.86).

Пересечение прямой линии с кривой поверхностью. Прямая линия может пересекать поверхность в двух и более точках, может касаться ее. Если прямая не имеет общих точек с поверхностью, это означает, что она не пересекает поверхность. Этапы решения этой задачи аналогичны описанному ранее построению пересечения прямой с плоскостью и многогранной поверхностью.

Аналогично решается задача на построение линии пересечения прямого кругового цилиндра фронтально проецирующей плоскостью (рис.86).

Пересечение прямой линии с кривой поверхностью. Прямая линия может пересекать поверхность в двух и более точках, может касаться ее. Если прямая не имеет общих точек с поверхностью, это означает, что она не пересекает поверхность. Этапы решения этой задачи аналогичны описанному ранее построению пересечения прямой с плоскостью и многогранной поверхностью.

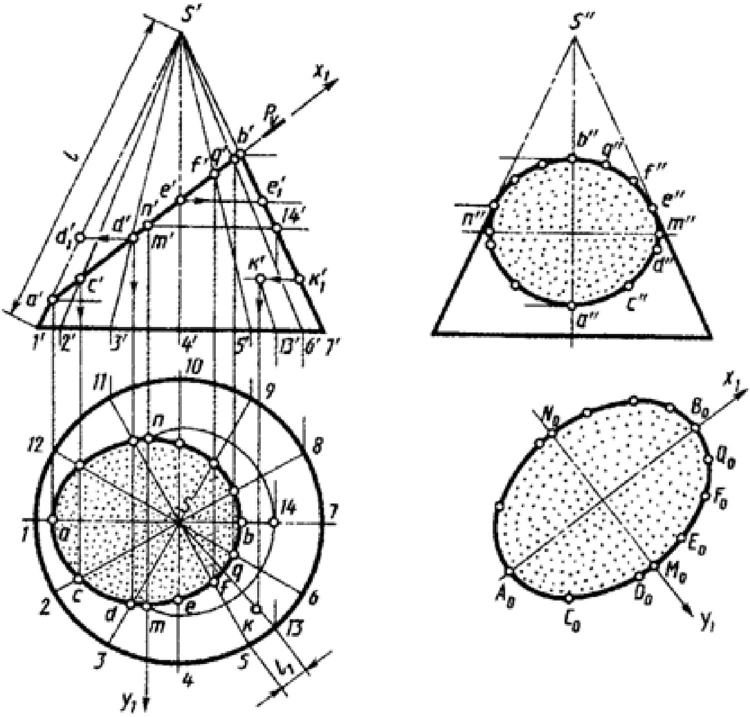


Рис. 85. Сечение конуса фронтально проецирующей плоскостью

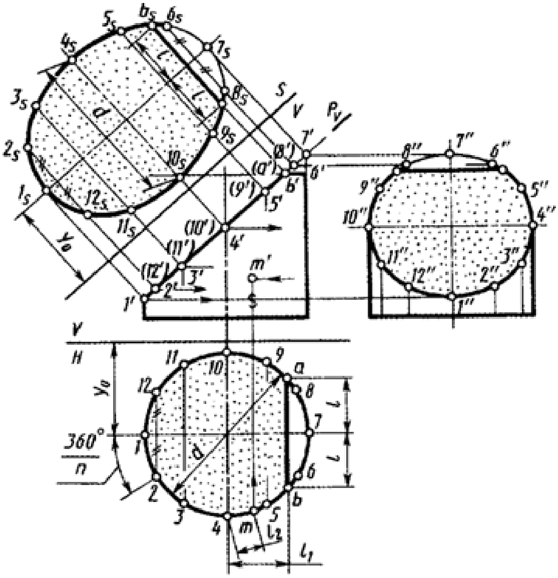


Рис. 86. Сечение цилиндра фронтально проецирующей плоскостью

Чтобы найти точки пересечения прямой линии с кривой поверхностью (рис. 87*), следует провести через данную прямую вспомогательную секущую плоскость и построить линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью. Точки пересечения прямой с построенной линией сечения поверхности и будут искомыми точками.*

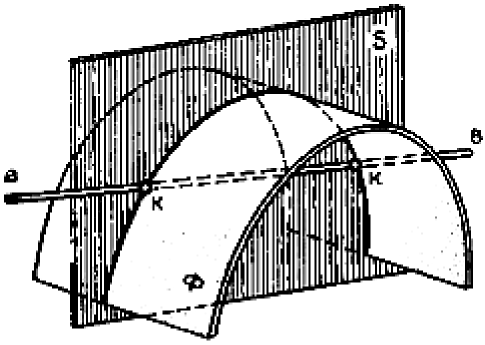


Рис. 87. Нахождение точки пересечения прямой с кривой поверхностью

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость. Однако в отдельных случаях следует принимать плоскость общего положения с тем, чтобы проекции сечения имели графически простую форму — прямые линии или окружности.

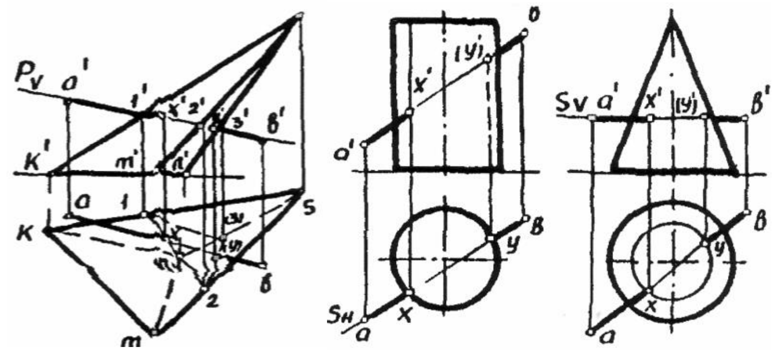


Рис. 88. Нахождение точек пересечения прямой с поверхностями с помощью плоскостей частного положения

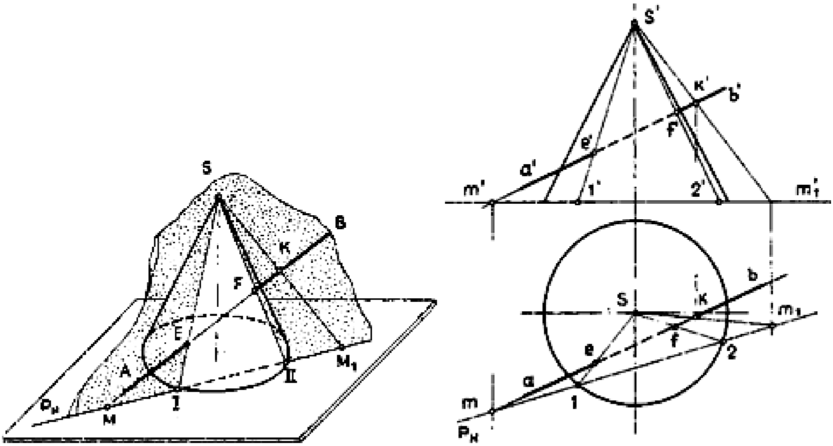


Рис. 89. Пересечение прямой общего положения с конусом – модель и эпюр

Пример 1. Построить точки пересечения прямой с конической поверхностью (рис.89). Если выбрать в качестве вспомогательных проецирующие плоскости, то сечениями поверхности будут кривые линии — гипербола или эллипс. Поэтому для определения точек пересечения прямой с поверхностью конуса через данную прямую следует провести вспомогательную плоскость общего положения, которая пересекла бы поверхность конуса по образующим. Такая плоскость должна быть проведена через данную прямую и вершину конуса.

Чтобы определить образующие, по которым плоскость пересекает конус, построим след секущей плоскости *на плоскости основания конуса* (в данном примере — на плоскости *H)* с помощью вспомогательной прямой SKM_1. Через два горизонтальных следа прямых пройдет след $P_н$ секущей плоскости. Искомые образующие конуса *S1* и *S2* определяем в пересечении горизонтального следа плоскости с окружностью основания конуса. Дальнейшие построения понятны из чертежа.

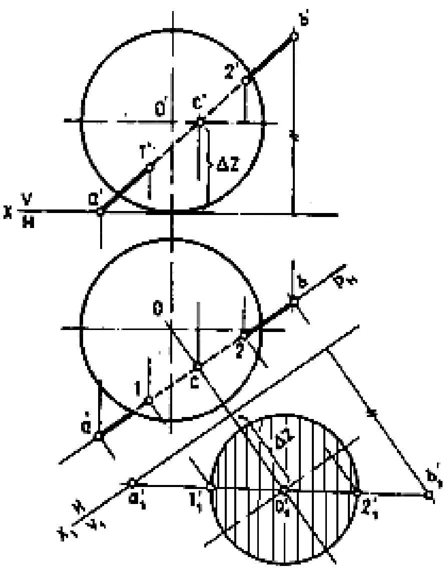


Рис. 90. Пересечение прямой общего положения с шаром

Пример 2. Построить точки пересечения прямой с поверхностью сферы (рис. 90). Через прямую проведена горизонтально проецирующая плоскость *P*. Она пересекает сферу по окружности, которая на фасаде изображается эллипсом. Чтобы избежать построения эллипса, применим способ замены плоскостей проекций и примем за новую фронтальную плоскость проекций плоскость V_x, параллельную секущей плоскости. Построим на новой плоскости V_i проекцию заданной прямой и окружность сечения сферы, отложив высоту ее центра — аппликату *Az*. Полученные точки пересечения проекции прямой с контуром сечения переносятся затем на исходные проекции. На плане будут видимыми точки, расположенные выше экватора сферы (точка 2), а на фасаде — точки, размещающиеся на передней половине сферы.

Взаимное пересечение поверхностей. Основной способ построения линии пересечения поверхностей — *способ вспомогательных секущих поверхностей (плоскостей).* Он аналогичен построению линии пересечений двух плоскостей общего положения, рассмотренному ранее. Сущность этого способа заключается в том, что обе заданные поверхности пересекаются вспомогательной третьей поверхностью (обычно плоскостью или сферой), затем строятся линии пересечения первой заданной поверхности с третьей, второй заданной поверхности с третьей и в пересечении этих линий отмечаются точки, принадлежащие как первой, так и второй заданным поверхностям, т. е. точки, принадлежащие линии их пересечения.

Вспомогательные секущие поверхности выбираем в зависимости от:

- условия задачи;
- вида пересекающихся поверхностей;
- расположения пересекающихся поверхностей относительно плоскостей проекций.

Положение вспомогательных секущих поверхностей выбирают так, чтобы они пересекали заданные поверхности по графически простым линиям — прямым или окружностям.

Построения выполняют в такой последовательности (рис.91): 1) проводят вспомогательную проецирующую плоскость S, пересекающую заданные поверхности; 2) строят линии *1 — 2* и *3 — 4* пересечения вспомогательной плоскости с заданными поверхностями Σ и *Ф*; 3) определяют точку *К* пересечения вспомогательных линий *1* — 2 и *3 — 4*.

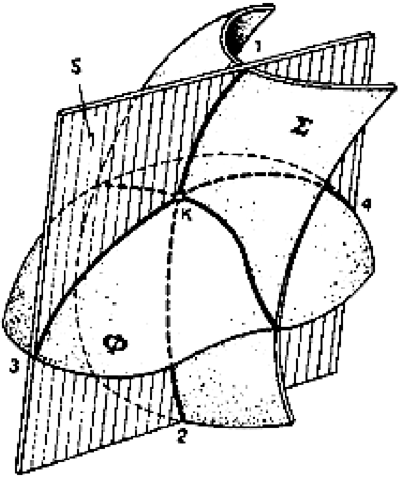


Рис. 91. Взаимное пересечение криволинейных поверхностей

Поскольку точка *К* одновременно принадлежит обеим вспомогательным линиям и, следовательно, пересекающимся поверхностям, то она является точкой, принадлежащей искомой линии пересечения. Проведя несколько вспомогательных секущих плоскостей, получим ряд точек линии пересечения. Их следует соединить плавной кривой в определенной последовательности. Проекции линии пересечения должны располагаться в пределах очерков как одной, так и другой поверхности одновременно.

Построение линии пересечения поверхностей начинают с определения характерных ее точек — *экстремальных* (высшей и низшей) и *точек видимости,* отделяющих видимую часть линии пересечения от невидимой. Приступая к построению линии пересечения поверхностей, следует выделить более простой случай, когда одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций и решение задачи упрощается.

Взаимное пересечение многогранных и кривых поверхностей. Многогранная и кривая поверхности пересекаются по ломаным кривым линиям, звенья которых (плоские кривые) – линии пересечения граней многогранной поверхности с кривой поверхностью, а точки излома – точки встречи ребер многогранника с кривой поверхностью. Решение задач на построение проекций линий пересечения многогранной поверхности и кривой и сводится к построению проекций точек встречи ребер многогранника и проекций линии пересечения граней его с кривой поверхностью.

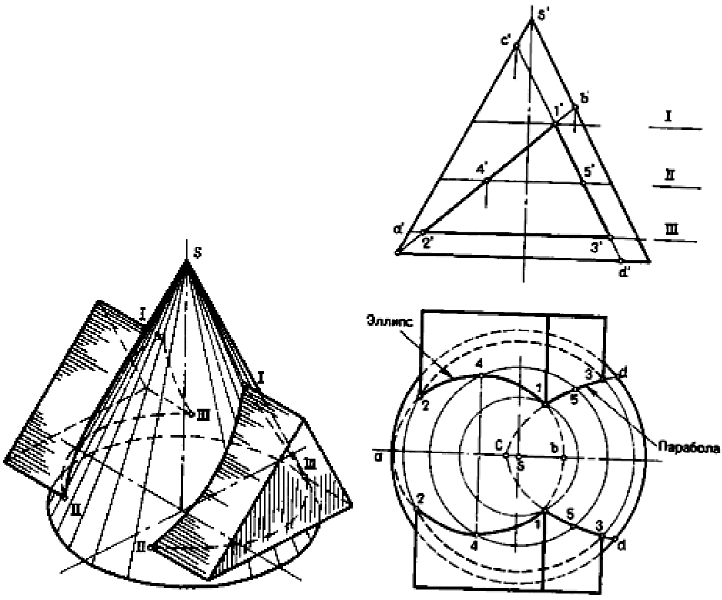


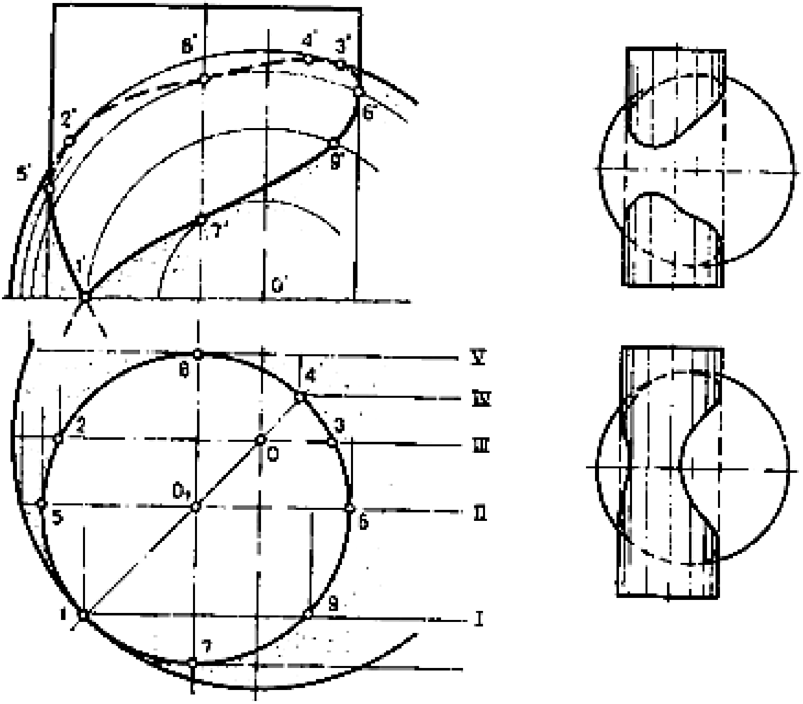
Рис. 92. Взаимное пересечение конуса и пирамиды

Пример 1. Построить пересечение трехгранной призмы с конусом вращения (рис. 92). Три боковые грани призмы являются фронтально проецирующими плоскостями, следовательно, построение линии пересечения сводится к решению ранее рассмотренной задачи на пересечение поверхности проецирующей секущей плоскостью и прямой линией. Линия пересечения данных поверхностей представляет собой ломаную линию, состоящую из трех плоских кривых. Грани призмы пересекают поверхность конуса по окружности, неполному эллипсу и неполной параболе. В данном случае вспомогательными плоскостями можно не пользоваться, так как фронтальные проекции точек линии пересечения известны.

Горизонтальные проекции линий пересечения строят по точкам с помощью трех параллелей конуса, проведенных через характерные точки линии пересечения. Промежуточная точка *4, 4'* выбрана посредине отрезка *a'b'*, который является большой осью эллипса.

Взаимное пересечение кривых поверхностей (поверхностей вращения). Две кривые поверхности в общем случае пересекаются по замкнутым пространственным кривым линиям, которые строятся по точкам, определяемым вспомогательными секущими плоскостями.

Пример 2. Построить линию пересечения цилиндра и сферы (рис.93, а). Боковая поверхность Цилиндра является горизонтально проецирующей, следовательно, горизонтальная проекция линии пересечения известна. Она совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра. Так как пересекаются две поверхности второго порядка, линией пересечения будет *пространственная кривая* — кривая четвертого порядка.



а **б**

Рис. 93. Взаимное пересечение цилиндра с полушаром:
а – по одной замкнутой линии; б – по двум замкнутым линиям

Проведем несколько фронтальных вспомогательных плоскостей, которые пересекут цилиндр по образующим, а сферу — по окружностям, параллельным фронтальной плоскости проекций.

Характерными, или опорными, точками (они выбираются на плане) являются:

а) точки *1, 2* и *3,* в которых проекции линии пересечения касаются горизонтального и фронтального очерков сферы, они определяются с помощью линий связи;

б) точка *4* — высшая, определяется на плане с помощью меридиана сферы, проходящего через ось цилиндра;

в) точки *5* и *6* — точки видимости и касания кривой к очерковым образующим цилиндра;

г) точки *7* и *8* — определяют границы изменения проекции линии пересечения.

На рис. 93 б приведены два других случая пересечения данных поверхностей при некотором изменении их взаимоположения. В первом из них линия пересечения представляет собой две симметричные замкнутые кривые, во втором — отсутствует общая (узловая) *точка самопересечения кривой.* Отсюда следует, что *два геометрических тела могут пересекаться полностью, тогда получим две замкнутые линии пересечения, или частично и тогда пересечение происходит по замкнутой линии.*

Пример 3. Построить линию пересечения конической и сферической поверхностей (рис. 94).

Точки 1 и 2 линии пересечения отмечаем без дополнительных построений, так как они являются характерными точками проекции линии пересечения, полученными по чертежу. Их горизонтальные проекции определяются с помощью линий связи. Для нахождения проекций точек 3, 4 и 5, 6 проводились вспомогательные горизонтальные секущие плоскости P и P_1, причем одна из них (P) проведена через центр шара, благодаря чему получены проекции точек 3 и 4 – характерных точек, определяющих границу видимости линии пересечения на горизонтальной плоскости проекций.

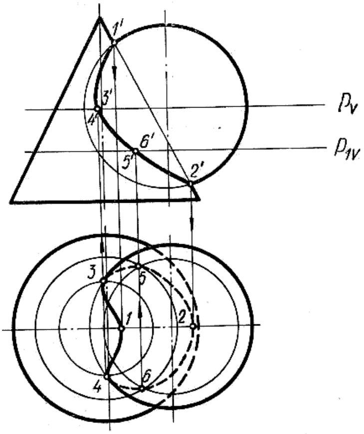


Рис. 94. Взаимное пересечение конуса с шаром

Метод сфер. Применение в качестве вспомогательных секущих поверхностей концентрических сфер при построении линии пересечения двух кривых поверхностей возможно при соблюдении следующих трех условий:

1) обе пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;

2) оси пересекающихся поверхностей должны пересекаться (не скрещиваться);

3) оси пересекающихся поверхностей должны быть параллельными одной из плоскостей проекций.

Рис. 95. Иллюстрация метода сфер

Дело в том, что сфера, центр которой находится на оси любой поверхности вращения, пересекает эту поверхность по окружности, а если при этом ось поверхности вращения параллельна какой-либо плоскости проекций, то эта окружность спроецируется на нее в виде отрезка прямой линии (рис. 95), точное построение которого не вызывает никаких затруднений.

Пример 1. Построить линию пересечения двух прямых круговых конусов при помощи вспомогательных секущих концентрических сфер (рис.96).

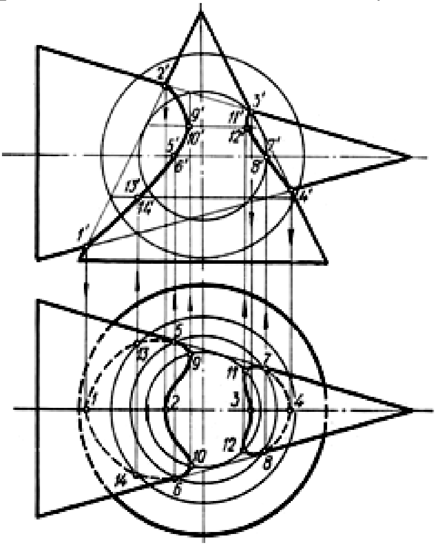


Рис. 96. Взаимное пересечение двух прямых круговых конусов

В рассматриваемом случае пересекаются два прямых круговых конуса, оси которых пересекаются и параллельны плоскости проекций *V*. Проекции точек *1, 2, 3, 4* линий пересечения отмечены при помощи линий связи, проекции характерных точек *5, 6* и *7, 8* определены вспомогательной секущей горизонтальной плоскостью *P*, проведенной через ось конуса, которая расположена перпендикулярно к плоскости проекций *W*, точек *9, 10* и *11, 12* — вспомогательной секущей сферой, проведенной касательной к поверхности конуса с осью, перпендикулярной к плоскости проекций *H* (наименьшей сферы), проекции точек *13* и *14* — вспомогательной сферой большего диаметра. Построения понятны из чертежа.

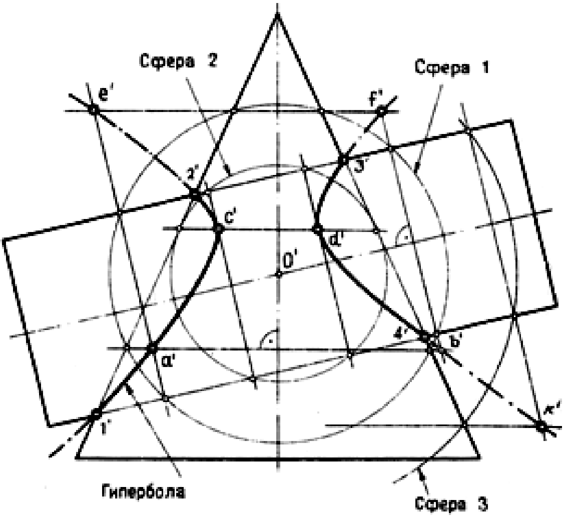


Рис. 97. Взаимное пересечение конуса и цилиндра

Пример 2. Построить линию пересечения прямого кругового конуса и наклонного цилиндра при помощи вспомогательных секущих концентрических сфер (рис.97).

В данном примере оси поверхностей вращения пересекаются и параллельны плоскости проекций. Для построения линии пересечения в данном случае нецелесообразно использовать вспомогательные секущие плоскости. Они не могут дать вспомогательные линии сечения, которые проецировались бы графически простыми линиями. Поэтому для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии параллельной плоскости проекций следует применить так называемый *способ вспомогательных концентрических сфер.*

Прежде чем приступить к построениям, отметим четыре общие точки $1'$ - $2'$ - $3'$- $4'$ цилиндра и конуса в пересечении очерковых образующих — главных меридианов поверхностей. Примем точку *O* пересечения осей за центр концентрических сфер. Проведем из центра O' вспомогательную секущую сферу *1* произвольного радиуса. Она пересечет каждую из поверхностей по двум параллелям, как это показано на рис. 99. Эти параллели принадлежат одной поверхности — сфере *1*, следовательно, точки их пересечения одновременно принадлежат и двум данным поверхностям — конусу и цилиндру, т. е. принадлежат линии их пересечения. Выбирая иной радиус вспомогательной сферы, можно построить любое число точек линии пересечения. Каждое сферическое сечение в общем случае определяет восемь точек линий пересечения, попарно совпадающих *(*a', b', e', f' *)* на фронтальной проекции.

Проведем сферу *2* наименьшего радиуса, которая пересечет цилиндр по двум параллелям и коснется конуса. Это сечение определяет четыре характерные точки противоположных частей линии пересечения, наиболее близко расположенные. Чтобы уточнить вид кривой, проведем еще одну вспомогательную сферу *3,* изобразив частично ее меридиан и параллели. Получим еще две совпадающие проекции точек (*к*').

Необходимо отметить следующую закономерность: *если оси поверхностей вращения второго порядка пересекаются и параллельны плоскости проекции у, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде плоской кривой второго порядка.*

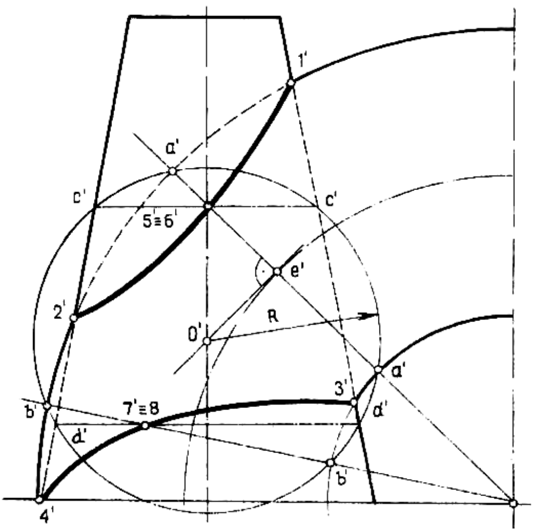


Рис. 98. Взаимное пересечение прямого усеченного конуса и тора

Пространственная кривая линии пересечения конуса и цилиндра проецируется на плоскость, параллельную их плоскости симметрии, в виде *гиперболы.*

Пример 3. Построить линию пересечения прямого усеченного кругового конуса и тора при помощи вспомогательных сферических сечений *способом эксцентрических сфер* (рис.98).

Для решения задачи необходимо построить вспомогательную сферу, которая пересечет обе поверхности по окружности. Проведена фронтальная проекция $a'a'$ окружности тора, которую можно принять за линию пересечения тора вспомогательной сферой. Затем через середину ее проекции проведена прямая $e'o'$, перпендикулярная к ней, до пересечения с осью конуса в точке o'.

Из точки o' проводят вспомогательную сферу радиуса $o'a'$, которая пересечет тор также по второй окружности $b'b'$, а конус – по двум окружностям $c'c'$ и $d'd'$. Каждая пара окружностей пересекается в двух общих точках $5' \equiv 6'$ и $7' \equiv 8'$, принадлежащих линиям пересечения поверхностей конуса и тора. Взяв другое сечение тора, найдем новые точки. Линия пересечения поверхностей проходит через точки $1'$, $2'$ и $3'$, $4'$.

Некоторые особые пересечения поверхностей второго порядка. В некоторых случаях расположение, форма или соотношения размеров криволинейных поверхностей таковы, что для изображения линии их пересечения никаких сложных построений не требуется. Рассмотрим некоторые такие случаи.

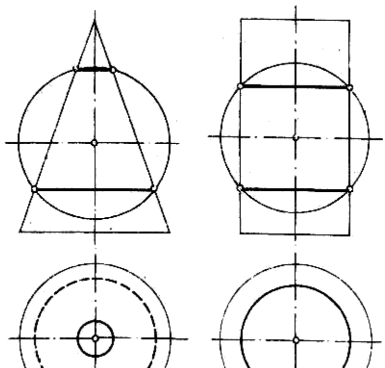


Рис. 99. Оси двух пересекающихся поверхностей вращения

1. *Оси двух пересекающихся поверхностей вращения совпадают* (рис. 99). Две поверхности вращения заданы одной осью и главными меридианами. Такие поверхности называют *соосными.* Точки пересечения меридианов при вращении вокруг оси описывают параллели, которые принадлежат обеим поверхностям. Следовательно, *две соосные поверхности вращения пересекаются по параллелям; при этом, если оси поверхностей параллельны плоскости проекции, то параллели проецируются на эту плоскость прямыми линиями, перпендикулярными проекции оси.*

2. *Пересечение поверхностей, описанных вокруг одной сферы* (рис.100). При этом условии линии их пересечения распадаются также на две плоские кривые.

В случаях, показанных на рис. 100 , поверхности двух цилиндров, конуса и цилиндра, тора и цилиндра пересекаются по двум эллипсам.

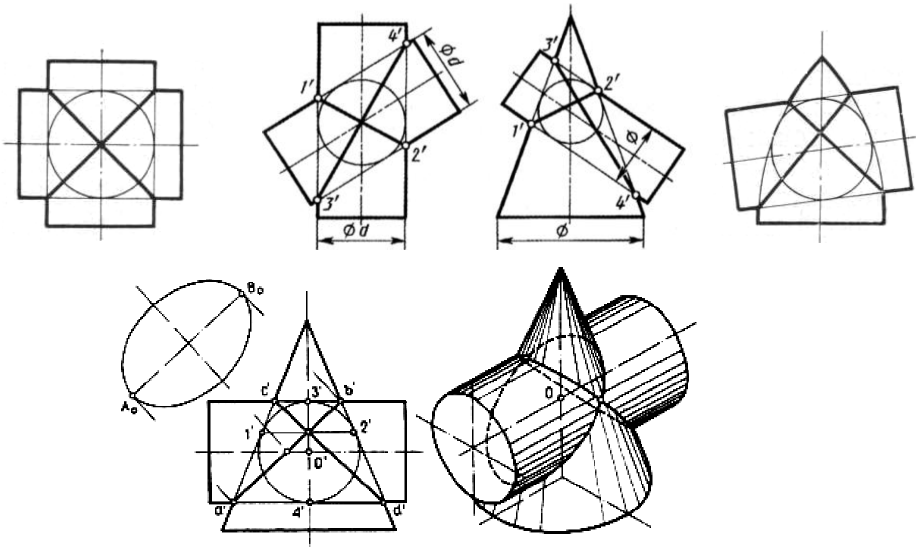


Рис. 100. Примеры пересечения поверхностей, описанных вокруг одной сферы

Тема 8
РАЗВЕРТКИ. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Развертывание поверхностей. В практике архитектурного проектирования и строительства развертывание поверхностей находит применение при разработке чертежей для раскроя плоского листового материала. Способы развертки поверхностей используются при проектировании пневматических и тентовых сооружений, а также при строительстве резервуаров различной формы, воздуховодов и т. д.

Форма и размеры плоских фигур определяются специальными приемами развертывания по чертежам запроектированных поверхностей. Построение разверток выполняется, как правило, только графическими приемами.

Развертыванием называется такое преобразование поверхности, в результате которого она совмещается с плоскостью. Плоская фигура, полученная в результате развертывания поверхности и совмещения ее с плоскостью, называется разверткой.

Ранее кривые поверхности были подразделены на развертываемые, которые могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и складок, и неразвертываемые. Развертывание последних выполняется приближенно при некоторой деформации или замене частей поверхности отсеками развертываемых поверхностей. Подобная замена отсеков одной поверхности отсеками другой, более простой поверхности называется *аппроксимацией.*

Как отмечалось ранее, к развертываемым относятся все гранные поверхности, а также кривые линейчатые поверхности нулевой кривизны — цилиндрические, конические и торсовые. На развертках этих поверхностей сохраняются длины отрезков линий, углы между пересекающимися линиями, величины площадей замкнутых участков поверхности. Такое преобразование пространственной фигуры в плоскую называют *изометрическим отображением.*

Следовательно, поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие.

Изометрическое отображение поверхности в плоскость включает два преобразования: одно из них, так называемое *конформное,* сохраняет инвариантными (неизменными) величину углов между линиями в точках их пересечения, а другое преобразование — *эквиреальное,* сохраняет величину площадей замкнутой области поверхности.

Свойство сохранения величины площадей в таком преобразовании предопределяет и сохранение длины соответственных отрезков линий поверхности и ее развертки.

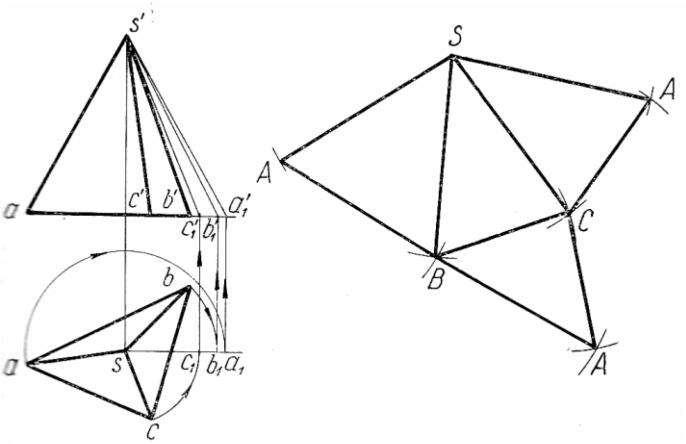


Рис. 101. Построение развертки пирамиды

Развертка многогранных поверхностей. *Разверткой многогранной поверхности называется плоская фигура, полученная в результате последовательного совмещения всех ее граней с плоскостью.*

1. Развертка пирамиды (рис.101). Основание пирамиды параллельно плоскости *H,* поэтому следует определить натуральную величину лишь боковых граней — треугольников. Истинная длина боковых ребер пирамиды определена способом вращения вокруг вершины *S*. Затем по трем сторонам строят контуры боковых граней, которые соединяют друг с другом смежными ребрами. К ним присоединяется основание пирамиды. Если необходимо на развертке построить точку, принадлежащую боковой поверхности, то поступают следующим образом. Через точку и вершину пирамиды проводят образующую, а затем – горизонталь, затем переносят на развертку натуральные величины проведенной образующей и горизонтали.

2. Развертка призмы. У прямой призмы все боковые ребра проецируются в натуральную величину (рис. 102).

Развертку боковой поверхности призмы с рис. 57 с основанием и фигурой сечения призмы строят следующим образом (рис. 103). Проводят прямую, на которой откладывают пять отрезков, равных длинам сторон пятиугольника, лежащего в основании призмы. Из полученных точек проводят перпендикуляры, на которых откладывают действительные длины ребер усеченной призмы, беря их с фронтальной или профильной проекции, и получают развертку боковой поверхности призмы.

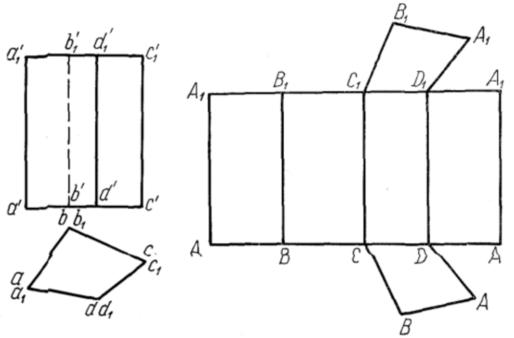


Рис. 102. Построение развертки призмы

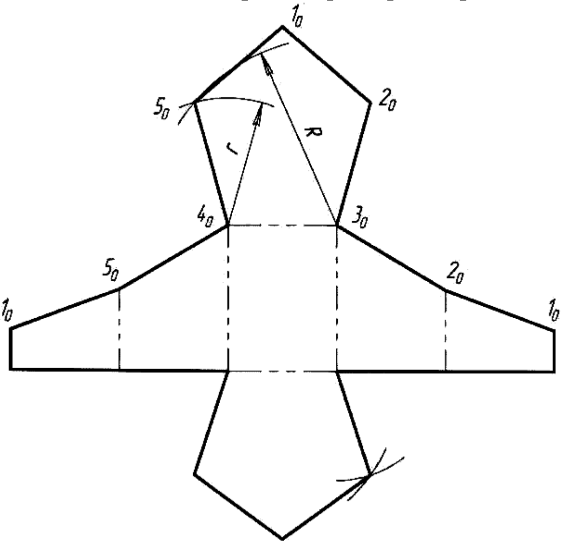


Рис. 103. Полная развертка усеченной призмы

К развертке боковой поверхности пристраивают фигуру нижнего основания — пятиугольник и фигуру сечения.

Развертка боковой поверхности усеченной пирамиды с рис. 58 с фигурой сечения и фигурой основания приведена на рис. 104.

Сначала строят развертку неусеченной пирамиды, все грани которой, имеющие форму треугольника, одинаковы. На плоскости намечают точку S_0 (вершину пирамиды) и из нее, как из центра, проводят дугу окружности радиусом *R,* равным действительной длине бокового ребра пирамиды. Действительную длину ребра можно определить по профильной проекции пирамиды, например отрезки *S'''E'''* или *S'''B'''*, так как эти ребра параллельны профильной плоскости и изображаются на ней действительной длиной. Далее по дуге окружности от любой точки, например, откладывают шесть одинаковых отрезков, равных действительной длине стороны шестиугольника — основания пирамиды. Действительную длину стороны основания пирамиды получают на горизонтальной проекции (отрезок *A'B')*. Точки A_0—E_0 соединяют прямыми с вершиной S_0. Затем от вершины S_0 на этих прямых откладывают действительные длины отрезков ребер до секущей плоскости.

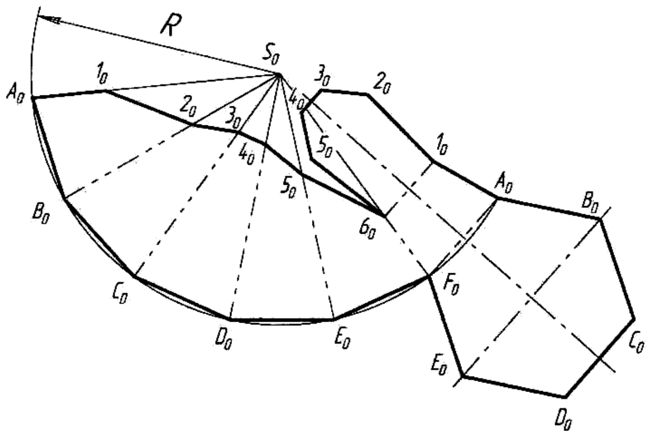


Рис. 104. Полная развертка усеченной пирамиды

На профильной проекции усеченной пирамиды имеются действительные длины только двух отрезков — *S'''5'''* и *S''2'''*. Действительные длины остальных отрезков определяют способом вращения их вокруг оси, перпендикулярной к горизонтальной плоскости и проходящей через вершину *S*.

Полученные точки 1_0, 2_0, 3_0 и т. д. соединяют прямыми и пристраивают фигуры основания и сечения.

Развертка кривых поверхностей. Развертки поверхностей *прямых* круговых конусов и цилиндров могут быть выполнены точно. Полная развертка кругового цилиндра представляет собой боковую поверхность цилиндра – прямоугольник со сторонами h и πD и два основания (верхнее и нижнее) диаметром D (рис. 105 а).

Полная развертка кругового конуса состоит из боковой поверхности – сектора круга, радиус которого равен длине AS образующей конуса, а центральный угол при его вершине $\psi = 180°D/AS$ и основания конуса диаметром D (рис. 105 б).

Полную приближенную развертку усеченного конуса с рис. 85 строят следующим образом (рис. 106). Построение сектора (см. рис. 106) выполняют с разбивкой его на равные части соответственно разметке образующих на чертеже (см. рис. 85).

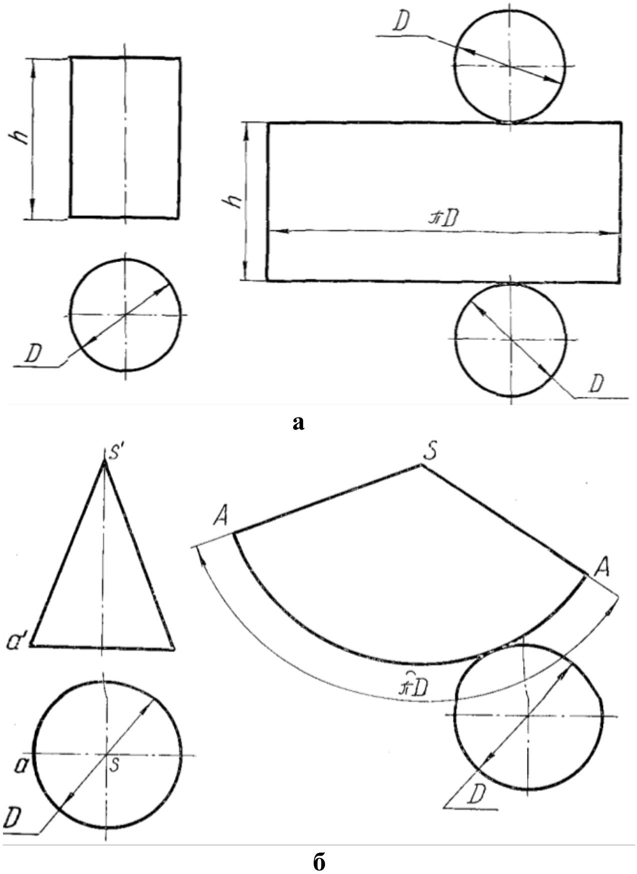


Рис. 105. Построение точных разверток: **а –** цилиндра, **б –** конуса

Используя положение образующих на чертеже и на развертке, находят положение точек на развертке при помощи натуральных величин отрезков от вершины до соответствующих точек линии пересечения на чертеже. При этом расстояния S_0 и S_0B_0 соответствуют фронтальным проекциям $s'a'$ и $s'b'$. Отрезки образующих от вершины до других точек проецируются на фронтальную плоскость проекций с искажениями. Поэтому их натуральную величину находят вращением вокруг оси конуса до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций.

На рис. 85 показано построение фронтальной и горизонтальной проекций точки K по изображению K_0 этой точки на развертке (см. рис. 106). Для построения проведена образующая $S_0 13_0$ через точку Ko на развертке. С помощью отрезка l_1 построена горизонтальная проекция 13. Через нее проведены горизонтальная s -13 и фронтальная s' - $13'$ проекции образующей S—13. Отрезок $So\ Ko = s'k'_1$ отмечен на проекции образующей $s'7'$. Обратным вращением построена фронтальная проекция k' точки K на фронтальной проекции образующей $s'13'$. Горизонтальная проекция k построена с помощью линии связи.

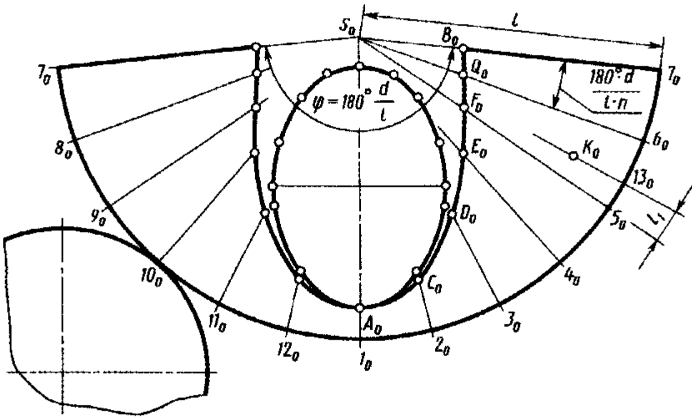


Рис. 106. Полная развертка усеченного конуса

Полную приближенную развертку усеченного цилиндра с рис. 86 строят следующим образом (рис. 107). Сначала строят полную развертку боковой поверхности цилиндра — прямоугольник с высотой, равной высоте цилиндра, а длиной L, длину L переносят с горизонтальной проекции цилиндра замеряя хорды , например, $7 – 8$ и так последовательно пока не перенесут все хорды на прямую. Для построения на развертке точек линии среза развертку основания цилиндра делят на такое же число частей, как и при построении проекций линий среза. Проводят через точки деления образующие и, пользуясь фронтальной проекцией, отмечают на них высоту до точек эллипса среза, например, точка 1_0. Соединяют построенные точки плавной кривой. Натуральный вид фигуры среза цилиндра плоскостью, выполненный ранее на рис. 86, переносят и пристраивают к развертке.

Построим на чертеже цилиндра проекции точки M, указанной на развертке точкой M_0. Для этого отметим хорду l_2 между образующей, на которой расположена точка M_0, и образующей точки *4*. По хорде l_2 строим горизонтальную проекцию *m* (рис. 86) и по известной высоте ее расположения находим ее фронтальную проекцию *m'*.

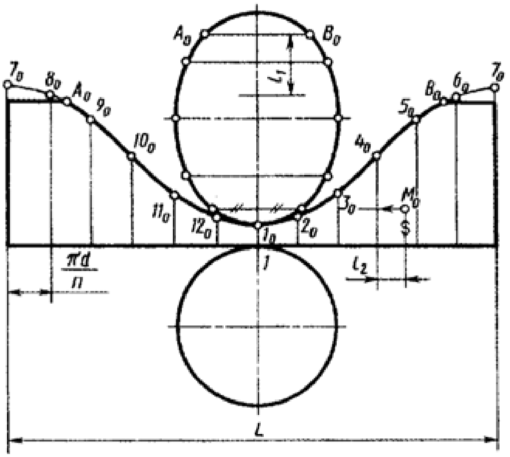


Рис. 107. Полная развертка усеченного цилиндра

Построение развертки поверхности наклонной призмы или наклонного цилиндра. Чтобы построить развертку боковой поверхности наклонной призмы, можно применить один из следующих способов:

а) способ треугольников (или триангуляции);
б) способ построения нормального сечения;
в) способ раскатки.

Сущность *способа треугольников* состоит в том, что каждая грань призмы диагональю разбивается на два треугольника, затем определяются истинные величины всех сторон треугольников, которые последовательно в истинную величину вычерчиваются на свободном поле чертежа.

На рис. 108 этот способ применен для построения развертки боковой поверхности трехгранной наклонной призмы.

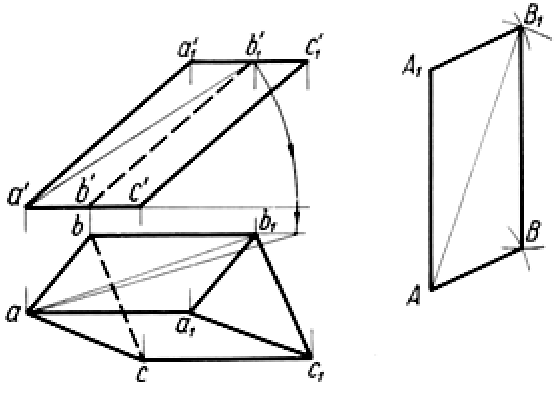


Рис. 108. Построение развертки наклонной призмы способом треугольников

Грань ABB_1A_1 диагональю AB_1 разделена на два треугольника.

Для построения истинной величины треугольника $A\,A_1B_1$ надо определить истинную величину только одной его стороны — стороны AB_1, так как в приведенном примере две другие стороны этого треугольника расположены относительно плоскостей проекций так, что одна из их проекций является истинной величиной: истинная величина стороны A_1B_1 — ее горизонтальная проекция a_1b_1,стороны AB_1 —фронтальная $a'a_1'$.

Истинная величина стороны AB_1 на рис. 108 определена вращением ее вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций V и проходящей через точку A. Затем к построенному в натуральную величину по трем сторонам треугольнику $A\,A_1B_1$ пристроен треугольник ABB_1, истинные величины всех сторон которого уже известны. Далее следует диагональю разделить на два треугольника вторую грань призмы, определить истинные величины всех сторон этих треугольников и построить их в натуральную величину примыкаемыми к первым двум, затем разделить на два треугольника следующую грань призмы и т. д.

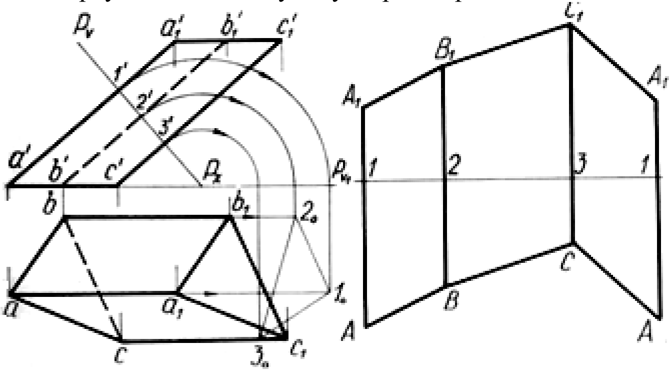


Рис. 109. Построение развертки наклонной призмы способом нормального сечения

На рис. 109 развертка боковой поверхности трехгранной наклонной призмы построена *способом нормального сечения*. Последовательность построений следующая:

1) призма рассекается нормальной (перпендикулярной к ее ребрам или граням) плоскостью. В приведенном примере нормальной плоскостью является фронтально проецирующая плоскость P, горизонтальный след которой на эпюре не показан;

2) строятся проекции и определяется истинная величина фигуры нормального сечения. На рис. 109 фронтальная проекция фигуры нормального сечения $(1'—2'—3')$ совпадает со следом секущей плоскости, а горизонтальная не показана. Истинная величина фигуры сечения $(1_0—2_0—3_0)$ построена способом совмещения — плоскость P вращением вокруг ее горизонтального следа совмещена с плоскостью проекций H;

3) истинная величина фигуры нормального сечения на свободном поле чертежа разворачивается в прямую линию *(1—1*) и от точек *1,2, 3, 1* проводятся перпендикуляры к прямой *1- 1;*

4) на перпендикулярах по обе стороны от точек *1, 2, 3, 1* откладываются истинные величины соответствующих ребер призмы и полученные точки *A, B, C, A* и A_1, B_1, C_1**,** A_1 соединяются отрезками прямых. В рассматриваемом примере ребра призмы параллельны плоскости проекций *V***,** а следовательно, истинными величинами их являются соответствующие фронтальные проекции.

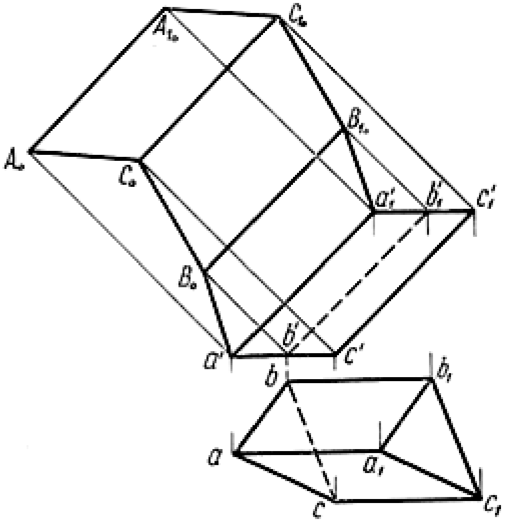


Рис. 110. Построение развертки наклонной призмы способом раскатки

Способ раскатки применим тогда, когда ребра призмы параллельны одной из плоскостей проекций, например плоскости проекций *V* на рис. 110. При этих условиях каждую грань призмы последовательно поворачивают вокруг одного из ребер, как вокруг фронтали, до положения, параллельного плоскости проекций *V*; все грани призмы спроецируются на плоскость проекций *V* в натуральную величину. Практически построения выполняются так. Из фронтальных проекций точек *A, B, C,* A_1, B_1, C_1 проводятся перпендикуляры к ребрам призмы (см. рис. 110). В рассматриваемом примере раскатка боковой поверхности призмы начата с грани ABB_1A_1. Чтобы повернуть ее вокруг ребра AA_1 до положения, параллельного плоскости проекций *V*, из точек a' и a_1' на перпендикулярах, выходящих из точек b' и b_1', сделаны засечки раствором циркуля, равным истинной величине стороны *AB* (A_1B_1) основания призмы (истинной величиной стороны *AB* основания призмы является ее горизонтальная проекция *ab)***.** Параллелограмм $a'B_0B_{1o}a_1'$ есть истинная величина грани ABB_1A_1. Затем из точек B_0 и B_{1o} раствором циркуля, равным истинной величине стороны *BC* (B_1C_1) основания призмы, сделаны засечки на перпендикулярах, выходящих из точек c' и c — параллелограмм $BoCoC_{1o}B_{1o}$ — истинная величина грани BB_1C_1C призмы.

Истинная величина грани CC_1A_1A построена аналогично. Фигура $a'B_oC_oA_oA_{1o}C_{1o}B_{1o}a_1^{/}$ — развертка боковой поверхности призмы.

Если необходимо построить развертку полной поверхности призмы, к построенной развертке боковой поверхности ее надо пристроить истинные величины оснований.

Для построения развертки поверхности наклонного цилиндра следует вписать в этот цилиндр многогранную призму, построить развертку ее поверхности, а затем полученные точки соединить не ломаной, а плавной кривой линией.

Приближенная развертка наклонного (эллиптического) *конуса* (рис.111). Боковая поверхность конуса аппроксимируется вписанной в нее многогранной поверхностью пирамиды, которая и развертывается. Натуральные величины боковых ребер (образующих конуса) определены вращением. Преобразованной точкой вершины конуса принята ее фронтальная проекция. Контур развертки боковой поверхности построен по точкам засечками из точки s' радиусом, равным длине образующей, и отрезком m, равным стороне многоугольника основания вписанной пирамиды.

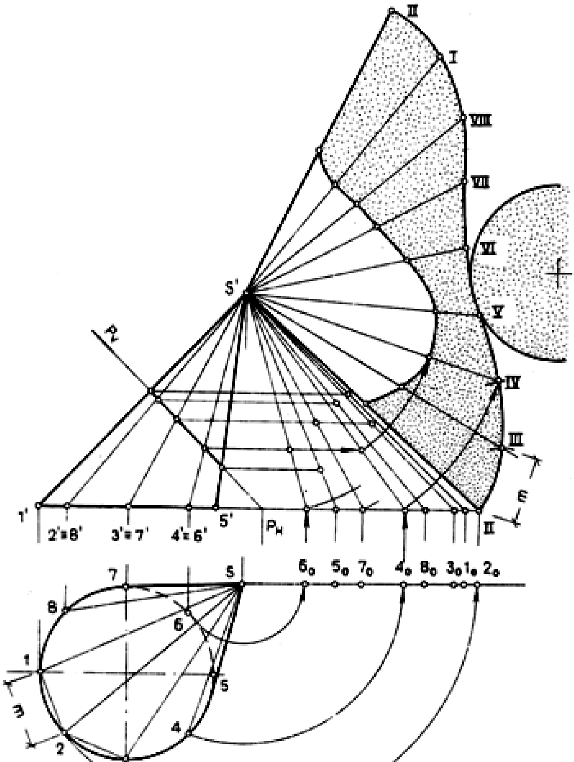
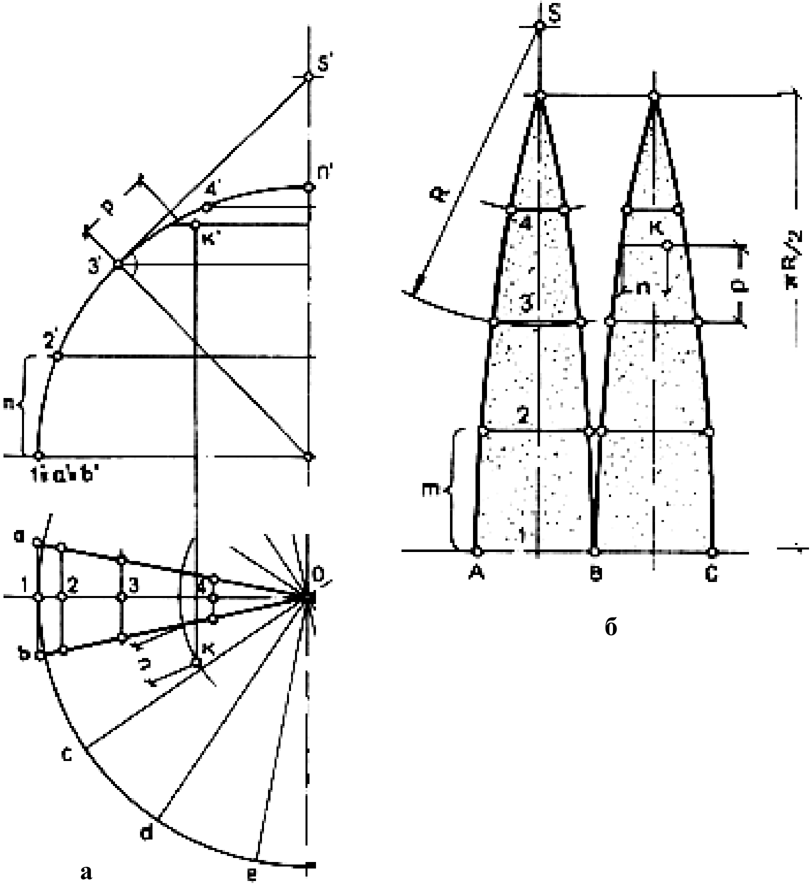


Рис. 111. Приближенная развертка наклонного (эллиптического) конуса

Граничные точки ребер пирамиды соединены плавной кривой. Поверхность конуса разрезана по образующей $S2$. Развертка боковой поверхности ограничена двумя прямыми — образующими и кривой линией — преобразованной граничной контурной линией конуса. На развертке показана линия пересечения конуса фронтально проецирующей плоскостью. Эллиптическая кривая сечения поверхности конуса преобразуется в другую плоскую кривую развертки боковой поверхности.



а

б

Рис. 112. Приближенная развертка сферы

Развертка сферы. Сферическая поверхность неразвертываема. Ее нельзя развернуть на плоскость без разрывов и складок. Для неразвертываемых поверхностей строят *условные развертки.* Один из способов развертки заключается в аппроксимации (замене) сферических элементов сферы цилиндрическими (рис. 112 а). Для этого поверхность сферы делится меридианами на части. Участки поверхности, заключенные между смежными меридианами, заменяются цилиндрической поверхностью, которая и развертывается.

В нашем примере поверхность полусферы разделена меридианами на 16 равных частей, которые проецируются на горизонтальную плоскость *H* секторами. Часть сферической поверхности, заключенную между смежными меридианами *AO* и *BO,* заменим цилиндрической поверхностью, касательной к сфере по главному меридиану. Разделим фронтальную проекцию этого элемента на четыре равные части. Определим горизонтальные проекции отрезков образующих *1, 2, 3* и *4* цилиндрического элемента.

Построим развертку этого элемента цилиндрической поверхности. На свободном месте чертежа (рис. 112 б) наметим ось симметрии элемента и отложим на ней четыре раза отрезок *m* — расстояние между делениями главного меридиана. В полученных точках откладываем по горизонтали отрезки образующих цилиндрического элемента, взятые с плана.

Если развертываемый элемент поверхности начинается с экватора сферы, этот его отрезок (отрезок *1*) изображается прямым. Если же элементы развертки начинаются с какой-либо промежуточной параллели сферы (например, когда поверхность представляет собой сферический сегмент), то на развертке эта параллель изобразится дугой окружности (отрезок *3*). Радиус этой окружности определяется на фронтальной проекции с помощью касательной $s'3'$, проведенной к очерку сферы в соответствующей точке, до пересечения с осью. Положение точки *K*, принадлежащей сфере, определяют на развертке с помощью двух измерений - *p* и *n* (координаты точки), взятых на фасаде и плане.

Тема 9
АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

На практике весьма часто возникает необходимость в наглядном изображении предмета на чертеже, т. е. в изображении его в трех измерениях. Это достигается аксонометрическими проекциями, сущность которых заключается в том, что изображаемый предмет располагается по отношению к некоторой плоскости проекций так, что при параллельном проецировании на нее ни одна из осей координат, к которым он отнесен в пространстве, не проецируется на плоскость проекций в виде точки. В результате ни одно из измерений изображаемого предмета не исчезает, и он проецируется на плоскость проекции в трех измерениях, а не в двух, как это получается при прямоугольном параллельном проецировании на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций (рис. 113).

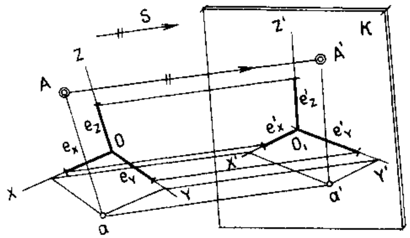


Рис. 113. Образование аксонометрических проекций

Аксонометрическими проекциями называют наглядные изображения объекта, получаемые параллельным проецированием его на одну плоскость проекций вместе с осями прямоугольных координат, к которым этот объект отнесен.

Основная теорема аксонометрии. При изменении взаимного положения осей координат и направления проецирования относительно плоскости проекций изменяются положение аксонометрических осей и показатели искажения по ним. Этому вопросу посвящена основная теорема аксонометрии (теорема Польке–Шварца): *три произвольно выбранных отрезка на плоскости, выходящие из одной точки, могут быть приняты за параллельную проекцию трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков, выходящих из некоторой точки пространства.*

Таким образом, из теоремы следует, что аксонометрические оси и показатели искажения по ним могут быть выбраны произвольно. Если задать на плоскости проекций K (см. рис.113) три проходящие через одну точку отрезка произвольной длины e'_x, e'_y и e'_z, можно утверждать, что они являются аксонометрической проекцией трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков пространства.

Размеры изображаемого предмета при аксонометрическом проецировании по всем трем осям искажаются, это следует из теоремы.

В зависимости от расположения плоскости проекций и направления проецирования возможны случаи, когда показатели искажения по всем трем осям одинаковы, или равны между собой только по двум осям, или показатели искажения по всем трем осям не равны между собой. Соответственно этому аксонометрические проекции называют *изометрическими* (износ — одинаковый), *диметрическими* (ди— двойной) и *триметрическими.*

Аксонометрические проекции бывают также *прямоугольные* (когда направление проецирования составляет с плоскостью проекций прямой угол) и *косоугольные.*

На практике применяются только некоторые определенные направления аксонометрических осей и определенные величины показателей искажения (табл. 2).

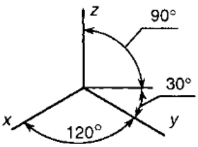
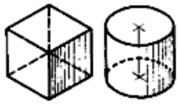
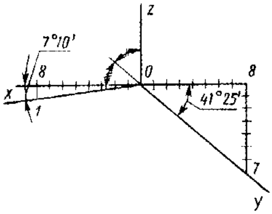
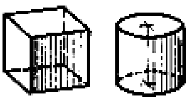
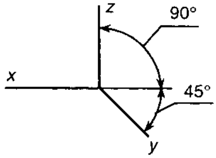
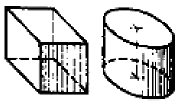
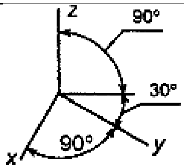
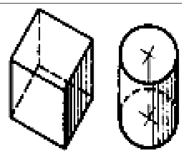
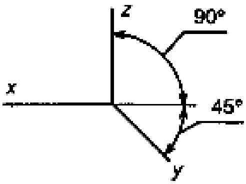
Выбор аксонометрических проекций. Выбор аксонометрических проекций при построении изображений может подчиняться различным требованиям. Главные из них — наглядность и простота построений.

Сравнительная оценка изображений, построенных в различных аксонометрических проекциях (табл. 2), показывает, что самым наглядным изображением, лишенным заметных искажений формы, является прямоугольная диметрия. В прямоугольной изометрии одинаковый ракурс боковых граней куба делает изображение многогранника недостаточно наглядным, а вот наглядность тел вращения не теряется, поэтому диметрия рекомендуется для всех геометрических тел, а вот в изометрии рекомендуют изображать лишь тела вращения. В прямоугольной диметрии этот недостаток отсутствует.

Выбирая тот или иной вид косоугольной аксонометрической проекции, следует иметь в виду, что наряду с неизменностью формы одной части объекта возникают заметные искажения других его частей. Изображенные объекты воспринимаются несколько деформированными, со скошенностью в направлении, перпендикулярном плоскости проекции.

В машиностроении принято использовать прямоугольное проецирование. Для прямоугольного проецирования: $\kappa^2 + m^2 + n^2 = 2$.

Таблица 2 – Аксонометрические проекции

Вид проекций	Расположение осей	Изображение геометрических тел	Коэффициенты искажения
Прямоугольная изометрия			$k_x=k_y=k_z=$ $=0{,}82\approx 1{,}0$
Прямоугольная диметрия			$k_x=k_z=$ $=0{,}94\approx 1{,}0$ $k_y=0{,}47=$ $\approx 0{,}5$
Косоугольная фронтальная изометрия			$k_x=k_y=k_z=$ $=1{,}0$
Косоугольная горизонтальная изометрия			$k_x=k_y=k_z=$ $=1{,}0$
Косоугольная фронтальная диметрия			$k_x=k_z=1{,}0$ $k_y=0{,}5$

Кроме этого, сумма квадратов двух любых показателей искажения не может быть меньше единицы.

Прямоугольная изометрическая проекция. При равном наклоне аксонометрической плоскости проекций ко всем трем осям координат и прямоугольном проецировании эта система спроецируется на плоскость проекций так, как показано на рис. 114а. Показатели искажения в этом случае по всем трем осям оказываются одинаковыми и равными 0,82. Это прямоугольная изометрическая проекция. *Но для упрощения построений на практике применяют так называемые приведенные показатели искажения, равные единице, т. е. размеры изображаемого предмета по всем трем осям отклады-*

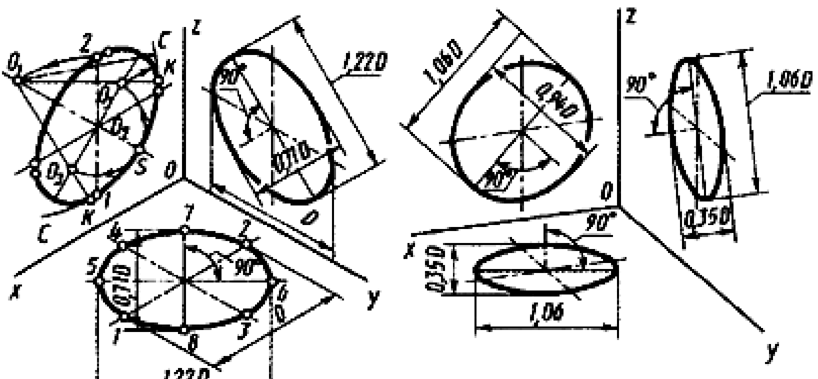
ваются в натуральную величину, а изображение предмета в связи с этим оказывается увеличенным в 1,22 раза по отношению к его истинной величине.

На рис. 114а изображена окружность в прямоугольной изометрической проекции *d*. Из рисунка видно, что все три окружности, каждая из которых расположена параллельно одной из плоскостей проекций, проецируются на них в виде равновеликих эллипсов, большие оси которых равны *1,22d* и расположены перпендикулярно к осям, отсутствующим в данных плоскостях, а малые равны *0,7d*.

Прямоугольная диметрическая проекция. При некотором расположении аксонометрической плоскости проекций относительно пространственной координатной системы и прямоугольном проецировании координатная система спроецируется на плоскость проекций, как показано на рис. 114б. Это прямоугольная диметрическая проекция.

Действительные показатели искажения в прямоугольной диметрической проекции по осям *X* и *Z* равны *0,94*, а по оси *У* — *0,47*, приведенные—соответственно *1,0* и *0,5*, в результате чего изображение на чертеже оказывается увеличенным по отношению к истинной величине *в 1,06 раза*.

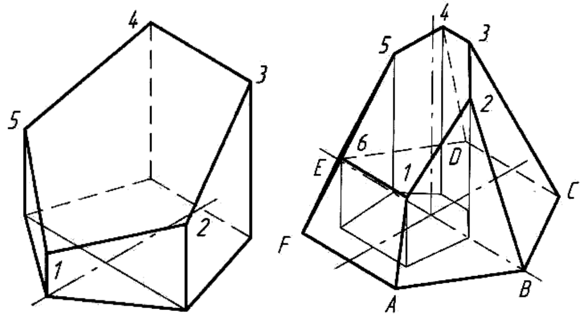
Изображение окружности в диметрии приведено на рис. 114б. Окружность, находящаяся в плоскости проекций *XOZ* (или в параллельной ей плоскости), проецируется на нее в виде эллипса, большая ось которого равна *l,06d,* а малая — *0,94d*. Окружности, находящиеся в плоскостях, параллельных двум другим плоскостям проекций, проецируются на них в виде одинаковых эллипсов, большие оси которых равны *l,06d,* а малые — *0,35d*. Большие оси эллипсов, так же как и в прямоугольной изометрии, перпендикулярны к отсутствующим в данной плоскости аксонометрическим осям.



а **б**

Рис. 114. Изображение окружности в: **а –** изометрии; **б –** диметрии

Для иллюстрации выполним построение усеченных призмы, пирамиды, цилиндра и конуса в аксонометрической проекции.

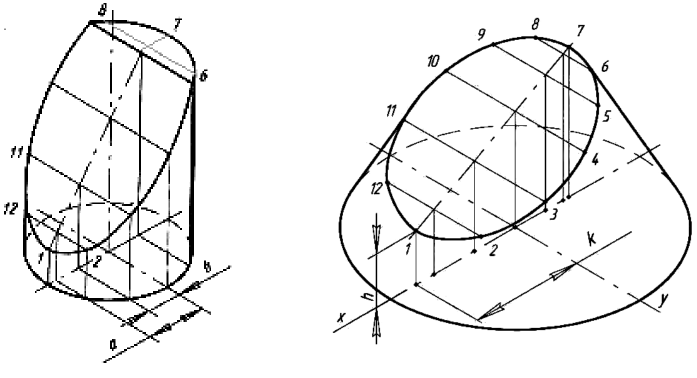


а **б**

Рис. 115. Изометрическая проекция: **а –** усеченной призмы;
б – усеченной пирамиды

На рис. 115а построена изометрическая проекция усеченной призмы с рис. 57. Порядок построения изометрической проекции следующий. Строят изометрическую проекцию основания призмы; проводят в вертикальном направлении линии ребер, на которых от основания откладывают их действительные длины, взятые с фронтальной или профильной проекции призмы. Полученные точки *1—5* соединяют прямыми линиями.

Построение изометрической проекции усеченной пирамиды с рис. 58 (рис. 115 б) начинают с построения изометрической проекции основания пирамиды по размерам, взятым с горизонтальной проекции комплексного чертежа. Затем на плоскости основания по координатам точек *1′—6′* строят горизонтальную проекцию сечения (тонкие линии на основании пирамиды). Из вершины полученного шестиугольника проводят вертикальные прямые, на которых откладывают координаты, взятые с фронтальной или профильной проекции призмы. Полученные точки *1—6* соединяют, получают фигуру сечения. Соединив точки *1—6* с вершинами шестиугольника, основания пирамиды, получают изометрическую проекцию усеченной пирамиды. Невидимые ребра изображают штриховыми линиями.



а **б**

Рис. 116. Изометрическая проекция усеченного: **а –** цилиндра; **б –** конуса

Изометрическую проекцию усеченного цилиндра строят следующим образом (рис. 116 а).

Сначала строят изометрию нижнего основания (эллипс) по восьми точкам, рассчитав предварительно значения большой и малой осей эллипса. Затем пристраивают полную боковую поверхность, отложив высоту цилиндра и верхнее основание цилиндра. По трем координатам, отложенным по соответствующим осям, и соединенным линиями параллельными соответствующим осям строят точки сечения цилиндра плоскостью в аксонометрии. Полученные точки соединяют по лекалу. Заканчивают построение проведением очерковых образующих, касательных к основаниям эллипса.

Построение изометрической проекции усеченного конуса (рис. 116 б) начинают с построения основания — эллипса. Изометрическую проекцию любой точки кривой сечения находят при помощи трех координат.

На оси x откладывают координаты точек *1—7*, взятые с горизонтальной проекции конуса (рис. 85). Из полученных точек проводят вертикальные прямые, на которых откладывают координаты z, взятые с фронтальной проекции точек, обозначенных буквами латинского алфавита. Через полученные на наклонной оси эллипса точки проводят прямые, параллельные оси y, и на них откладывают отрезки *6', 8', 4' 10'* и т. д., взятые на горизонтальной проекции. Найденные точки соединяют. Крайние очерковые образующие проводят по касательной к контуру основания конуса и эллипса.

На практике рекомендуется аксонометрические проекции многогранников чертить в прямоугольной диметрии, а тела вращения – в прямоугольной изометрии.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Предмет и метод начертательной геометрии.
2. Точка и прямая.
3. Взаимные положения прямых.
4. Виды проецирования.
5. Ортогональное проецирование.
6. Эпюр Монжа.
7. Чертежи точек.
8. Чертежи отрезков прямых линий.
9. Взаимное положение двух прямых.
10. Следы прямой.
11. Плоскость. Задание плоскости на чертеже.
12. Расположение плоскости относительно плоскостей проекций.
13. Прямая и точка в плоскости.
14. Пересечение плоскостей и прямой плоскостью.
15. Перпендикулярность и параллельность прямой и плоскости.

16.Перпендикулярность и параллельность двух плоскостей.
17.Главные линии плоскости.
18.Способы преобразования проекций.
19.Способ замены плоскостей проекций.
20.Способ вращения.
21.Вращение вокруг проецирующей оси.
22.Плоскопараллельное перемещение.
23.Поверхности. Классификация, способы задания, определитель поверхности.
24.Линейчатые поверхности.
25.Кривые линии и поверхности.
26.Поверхности вращения с образующей прямой линией.
27.Поверхности вращения с образующей кривой линией.
28.Точка на поверхности.
29.Главные позиционные задачи.
30.Главные метрические задачи.
31.Пересечение поверхностей прямой линией.
32.Сечение поверхностей плоскостью.
33.Взаимное пересечение поверхностей. Способы построения линий пересечения поверхностей.
34.Пересечение многогранников плоскостью и прямой линией.
35.Взаимное пересечение многогранников.
36.Взаимное пересечение криволинейной поверхности с многогранной.
37.Взаимное пересечение кривых поверхностей.
38.Метод сфер.
39.Особые случаи пересечения поверхностей.
40.Развертки поверхностей.
41.Развертки многогранников.
42.Построение развертки поверхности наклонной призмы или цилиндра.
43.Точные и приближенные развертки.
44.Условные развертки неразвертывающихся поверхностей.
45.Развертка сферы.
46.Аксонометрические проекции.
47. Основная теорема аксонометрии.
48. Прямоугольные изометрические проекции.
49. Прямоугольные диметрические проекции.
50.Окружность в прямоугольной изометрической и диметрических проекциях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Начертательная геометрия: учебник / Фролов С.А., – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 285 с.: – (Высшее образование: Бакалавриат) – Режим доступа: http://znanium.com/catalog/ product/1011069 *(ЭБС ИНФРА-М)*

2. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение [текст]: учебник для бакалавров / А.А. Чекмарев. – 4-е изд., исправ. и доп. - Москва: Юрайт, 2013. – 471 с.

3.Тарасов Б.Ф., Дудкина Л.А., Немолотов С.О. Начертательная геометрия: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2012. – 256с.: ил. (Учебники для вузов. Специальная литература). *(ЭБС Лань)*

4. Начертательная геометрия [текст]: учебное пособие для студентов вузов / В.В. Корниенко [и др.]. - 4-е изд., исправ. и доп. - Санкт-Петербург: Москва: Краснодар: Лань, 2013. - 192 с.: ил.

5. Начертательная геометрия: учеб. пособие / Ю.А. Зайцев, И.П. Одиноков, М.К. Решетников; под ред. Ю.А. Зайцева. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 248 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog/ product/948560 *(ЭБС ИНФРА-М)*.

6. Начертательная геометрия. Практикум: Учебное пособие / Е.И. Белякова, П.В. Зеленый. - М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 214 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011555-9 *(ЭБС ИНФРА-М)*

7. Леонова, О.Н. Начертательная геометрия в примерах и задачах: учебное пособие / О.Н. Леонова, Е.А. Разумнова. – Санкт-Петербург: Лань, 2018. – 212 с. – ISBN 978-5-8114-2918-9. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: https://e.lanbook.com/book/103068. – Режим доступа: для авториз. пользователей. *(ЭБС Лань)*.

8. Талалай П.Г. Начертательная геометрия на примерах. /П.Г. Талалай – СПб.: БЧВ-Петербург, 2011. – 288 с.: ил.

9. Талалай, П.Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2010. — 288 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/615 — (ЭБС)

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Составители: Татьяна Витальевна Семенова,
Елена Владимировна Петрова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 29 сентября 2020 года
Формат 60×84 1/16. Объем уч.-изд. л., усл. печ. л.
Тираж 200 экз. Изд. № Заказ №.

Отпечатано в издательстве НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160