ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Математическая логика и теория алгоритмов

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

38.03.01 *Экономика*
38.03.02 *Менеджмент*
38.03.03 *Управление персоналом*
38.03.04 *Государственное и муниципальное управление*

Новосибирск 2021

Рецензент: кандидат техн. наук, доцент С.Н. Бурков

Математическая логика и теория алгоритмов: методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. М.В.Грунина. – Новосибирск, 2021. – 23 с.

Методические указания предназначены для студентов очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки: 38.03.01 Экономика; 38.03.02 Менеджмент; 38.03.03 Управление персоналом; 38.03.04 Государственное и муниципальное управление.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол №2 от 26 октября 2021).

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математической логики и теории алгоритмов в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического аппарата теории алгоритмов, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в математической логике конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое и алгоритмическое мышление,

– познакомить студентов с идеями и методами математической логики,

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,

– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев математической логики и теории алгоритмов.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

основные понятия и методы математической логики в объеме необходимом для профессиональной деятельности;

Уметь:

использовать методы теории алгоритмов для решения организационных и управленческих задач;

Владеть:

навыками применения инструментария математической логики и теории алгоритмов в профессиональной деятельности.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.
2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.
3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.
4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.
5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.
6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.
7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы,** то она **не будет зачтена.**
8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.
9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ вари-анта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

3. Задания для контрольной работы

В задачах **1-10** на универсальном множестве U заданы множества A, B, C. Задать перечислением множества а) - в).

1. U={10, 20, 30, 40, 50, 60}
A={x| x=20n, n=1, 2, 3}
B={x| x=30n, n=1, 2}
C={x| x=10n, n=1, 2, 3}
а) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$
б) $C\setminus B$
в) $(A\cup C)\cap(B\cup C)$

2. U={2, 4, 8, 16, 32}
A={x | x≥8}
B={x | x<16}
C={x | x=4n, n=1, 2}
а) $A\Delta C$
б) $A\cup(B\cap\overline{C})$
в) $\overline{A}\cap B\cap C$

3. U={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
A={x | x кратно 3}
B={x | x<7}
C={x | x четное}
а) $\overline{A}\Delta\overline{B}$
б) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
в) $(\overline{C}\cap\overline{B})\setminus A$

4. U={3, 6, 9, 12, 15}
A={x | x кратно 2}
B={x |x>10}
C={x | x нечетное}
а) $\overline{B}\cap\overline{C}$
б) $(A\cup B)\cap\overline{B}$
в) $\overline{(A\cap B)}\cup C$

5. U={3, 6, 9, 10, 15, 20}
A={x | x≤15}
B={x | x кратно 2}
C={3, 6, 9}
а) $C\setminus(A\cap B)$
б) $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$
в) $(A\setminus B)\cup(C\setminus B)$

6. U={1, 6, 12, 18, 24}
A={x | x≥12}
B={x | x<18}
C={x | x делитель 12}
а) $C\setminus\overline{A}$
б) $\overline{B}\cap\overline{C}$
в) $(C\cap B)\setminus(\overline{C}\cup A)$

7. U={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
A={x | x кратно 3}
B={x | x делитель 16}
C={x | x<8}
а) $C\setminus B$
б) $B\cap\overline{A}$
в) $C\cup(A\cap B)$

8. U={2, 4, 8, 16, 32, 64}
A={4, 16, 64}
B={x | x≥16}
C={x | x<32}
а) $\overline{A}\Delta\overline{B}$
б) $C\setminus A$
в) $\overline{A}\cup B\cup\overline{C}$

9. U={2, 3, 4, 6, 8, 9}
A={ x | x кратно 2}

10. U={20, 21, 22, 23, 24, 25}
A={ x | x четное}

B={ x | x кратно 3}
C={ x | x делитель 12}
а) $A \bigcap C$
б) $\overline{(B \bigcup C)}$
в) $(A \Delta B) \setminus C$

B={ x | x кратно 3}
C={ x | x >22}
а) $A \Delta B$
б) $C \setminus A$
в) $(A \bigcup C) \setminus (C \bigcap B)$

В задачах **11-20** запишите с помощью логических операций следующие сложные высказывания и вычислите их логические значения:

11. (6/2=3) ИЛИ (7*5=20)
12. («В минуте 70 секунд») ИЛИ («Работающие часы показывают время»)
13. (28>7) И (300/5=60)
14. Неверно, что ((300>100) ИЛИ («Жажду можно утолить водой»))
15. ЕСЛИ (75<81), то (88=88)
16. («Телевизор - электрический прибор») И («Париж – столица США»)
17. Если («часы неправильно показывают время»), то («можно опоздать на занятия»)
18. («В зеркале можно увидеть своё отражение») И («Токио - столица Казахстана»)
19. (Не(15<3)) И (10>20)
20. («Татарск – город в Новосибирской области») И («Под третьим этажом находится второй этаж»)

В задачах **21–30** для функции, заданной формулой, построить таблицу истинности, записать СДНФ, СКНФ, многочлен Жегалкина и проверить её принадлежность Классам Поста.

21. $f = (a \to b) \oplus c$
22. $f = (b \sim \overline{a}) \vee \overline{c}$
23. $f = \overline{a \to (b \oplus c)}$
24. $f = (a \sim b) \oplus \overline{c}$
25. $f = (a \oplus b) \to \overline{c}$
26. $f = \overline{a \sim (b \to c)}$
27. $f = \overline{(a \sim (b \to c))}$
28. $f = \overline{(a \oplus c)} \to b$
29. $f = (a \sim c) \oplus b$
30. $f = \overline{a \to (c \sim \overline{b})}$

31. Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(1) = 1$

$F(2) = 3$

$F(n) = F(n–1) * n + F(n–2) * (n – 1)$, при $n >2$

Чему равно значение функции F(5)?

32. Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(1) = 1$

$F(2) = 3$

$F(n) = F(n-1) * F(n-2) + (n-2)$, при $n > 2$

Чему равно значение функции F(5)?

33. Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(1) = 1$

$F(2) = 2$

$F(n) = 2 * F(n–1) + (n – 2) * F(n–2)$, при $n >2$

Чему равно значение функции F(6)?

34. Последовательность чисел Фибоначчи задается рекуррентным соотношением:

$F(1) = 1$

$F(2) = 1$

$F(n) = F(n–2) + F(n–1)$, при $n >2$, где n – натуральное число.

Чему равно восьмое число в последовательности Фибоначчи?

35. Последовательность чисел Фибоначчи задается рекуррентным соотношением:

$F(1) = 1$

$F(2) = 1$

$F(n) = F(n–2) + F(n–1)$, при $n >2$, где n – натуральное число.

Чему равно девятое число в последовательности Фибоначчи?

36. Последовательность чисел Люка задается рекуррентным соотношением:

$F(1) = 2$

$F(2) = 1$

$F(n) = F(n–2) + F(n–1)$, при $n >2$, где n – натуральное число.

Чему равно восьмое число в последовательности Люка?

37. Последовательность чисел Люка задается рекуррентным соотношением:

$F(1) = 2$

$F(2) = 1$

$F(n) = F(n–2) + F(n–1)$, при $n >2$, где n – натуральное число.

Чему равно десятое число в последовательности Люка?

38. Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

F(1) = 1

F(2) = 1

F(n) = F(n–1) * n − 2 * F(n–2), при n >2

Чему равно значение функции F(6)?

39. Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

F(1) = 1

F(2) = 2

F(n) = F(n–1) − F(n–2) + 2 * n, при n >2

Чему равно значение функции F(6)?

40. Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

F(1) = 1

F(2) = 2

F(n) = (F(n–1) − F(n–2)) * n, при n >2

Чему равно значение функции F(8)?

В задачах **41–50** на универсальном множестве $U = \{x \in Z \mid x^2 - 4x - 21 \le 0\}$ определены множества $A = \{x \in U \mid \dfrac{x^2 - x - 12}{x(x-1)} \le 0\}$ и $B = \{x \in U \mid x^2 - 2x - 3 \ge 0\}$. Даны предикаты *P(x)* = «*x* принадлежит *A*» и *Q(x)*= «*x* принадлежит *B*». Найти область истинности предиката *R(x)*.

41. $R(x) = P(x) \vee Q(x)$

42. $R(x) = P(x) \to Q(x)$

43. $R(x) = P(x) \sim Q(x)$

44. $R(x) = P(x) \,\&\, Q(x)$

45. $R(x) = P(x) \oplus Q(x)$

46. $R(x) = P(x) \leftarrow Q(x)$

47. $R(x) = P(x) \mid Q(x)$

48. $R(x) = P(x) \downarrow Q(x)$

49. $R(x) = \neg P(x) \vee Q(x)$

50. $R(x) = \neg(P(x) \,\&\, Q(x))$

4. Справочные материалы
Задачи 1 – 10

Множество – совокупность некоторых объектов. Все объекты различны и отличимы друг от друга. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами.

Традиционно множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита ($A, B, X, Y, M, ...$), а их элементы – малыми буквами ($a, b, x, y, m, ...$).

Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A; $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом Ø.

В конкретных рассуждениях все элементы рассматриваемых множеств являются элементами некоторого одного множества U (которое определяется для каждого случая индивидуально), которое называется универсальным множеством или универсумом.

Способы задания множеств:

1. перечислением, т.е. списком элементов множества: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$;
2. описанием характеристических свойств, которыми должны обладать элементы множества: $A = \{a \mid P(a)\}$;
3. порождающей процедурой, которая описывает способ получения новых элементов множества из уже полученных или других объектов: $A = \{a \mid a := f(b)\}$.

Множество A является **подмножеством** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Два множества **равны**, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A).$$

Мощностью конечного множества называется величина, равная числу элементов этого множества. Мощность множества A обозначается $|A|$. Если $|A| = |B|$, то множества A и B называются равномощными.

Операции над множествами

1. объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$;

2. пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$;
3. разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$;
4. симметрическая разность:
   $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B)\}$;
5. дополнение: $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Диаграммой Эйлера-Венна называется геометрическое представление множеств. На диаграмме множества изображаются фигурами, ограниченными замкнутыми линиями (например, кругами). Для выделения результата операций используется штриховка.

Задачи 11 – 20

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно в данном месте и в данное время. Логические значения высказываний – 1 («истина») или 0 («ложь»)
Логические операции над высказываниями: отрицание (унарная операция), конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность (бинарные операции).
Отрицанием высказывания x называется высказывание x, которое истинно, если x ложно, и ложно, если x истинно. Читается «не x» или «неверно, что x».
Конъюнкцией высказываний x и y называется высказывание x & y, которое истинно, если x и y истинны, и ложно, если хотя бы одно из них ложно. Читается «x и y».
Дизъюнкцией высказываний x и y называется высказывание $x \vee y$, которое истинно, если хотя бы одно из высказываний x или y истинно, и ложно, если оба они ложны. Читается «x или y».
Импликацией высказываний x и y называется высказывание $x \to y$, которое ложно, если x истинно, а y ложно, и истинно во всех остальных случаях.
Читается «из x следует y» или «если x, то y».
Эквивалентностью высказываний x и y называется высказывание $x \leftrightarrow y$, которое истинно, если оба высказывания x и y одновременно истинны или ложны, и ложно во всех остальных случаях. Читается «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y».
Значения логической операции можно описать с помощью таблицы, связывающей значения операндов и операции. Такая таблица называется таблицей истинности.

Таблица истинности для логических операций:

x	***y***	$\overline{x}$	***x & y***	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	***x~y***	$x \oplus y$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Задачи 21 – 30

Булевой функцией называется функция вида f: B^n —> B, где B = {0;1}, т.е. $f\ (x_1, x_{2,}, x_n\ )$, принимающая значения 0, 1 и аргументы которой могут принимать значения 0, 1.

Таблица истинности булевых функций одного аргумента

x	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Используются обозначения: $g_1(x) \equiv 0$ - константа 0; $g_2(x) \equiv 1$ - константа 1; $g_3(x) = x$ - тождественная функция; $g_4(x) = \overline{x}$ – отрицание. Для отрицания употребляется также обозначение $\neg x$.

Таблица истинности булевых функций двух аргументов

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Используются обозначения:

$f_1(x,y) \equiv 0$ – константа 0;

$f_2(x,y) = x\&y$, конъюнкция, также используются обозначения $x \wedge y$ и $x \cdot y$;

$f_4(x,y) = x$ - переменная x;

$f_6(x,y) = y$ – переменная y;

$f_7(x,y) = x \oplus y$, неравнозначность или сложение по модулю 1;

$f_8(x,y) = x \vee y$, дизъюнкция;

$f_9(x,y) = x \downarrow y$, стрелка Пирса;

$f_{10}(x,y) = x \equiv y$, эквивалентность или равнозначность также используется обозначение $x \sim y$;

$f_{11}(x,y) = \neg y$, отрицание переменной y;

$f_{12}(x,y) = x \to y$ **,** импликация, также используется обозначение $x \supset y$;
$f_{14}(x,y) = y \to x$**,** импликация;
$f_{15}(x,y) = y \mid x$**,** штрих Шеффера;
$f_{16}(x,y) \equiv 1$ – константа 1.

Степенью логической переменной называется выражение вида

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, \text{ если } \sigma = 0 \end{cases}$$

Элементарной конъюнкцией называется выражение вида $K = x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. Дизъюнктивная нормальная форма называется **совершенной (СДНФ)**, если каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные данной функции или их отрицания.

Теорема. Любая логическая функция, кроме константы 0, имеет единственную СДНФ.

Алгоритм построения СДНФ.

Шаг 1. Построить таблицу истинности.
Шаг 2. В столбце значений функции выбрать 1.
Шаг 3. По каждой выбранной строке записать элементарную конъюнкцию по правилу: 0 => $\bar{x}$, 1=> x.
Шаг 4. Полученные элементарные конъюнкции соединить дизъюнкциями.

Элементарной дизъюнкцией называется выражение вида $D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций. Конъюнктивная нормальная форма называется **совершенной (СКНФ)**, если каждая элементарная дизъюнкция содержит все переменные данной функции или их отрицания.

Теорема. Любая логическая функция, кроме константы 1, имеет единственную СКНФ.

Алгоритм построения СКНФ.

Шаг 1. Построить таблицу истинности.
Шаг 2. В столбце значений функции выбрать 0.
Шаг 3. По каждой выбранной строке записать элементарную дизъюнкцию по правилу: 0 => x, 1=> $\bar{x}$.
Шаг 4. Полученные элементарные дизъюнкции соединить конъюнк-

циями.

Алгебра логических функций в системе, состоящей из функций $\{1, \wedge, \oplus\}$, называется **алгеброй Жегалкина**.

Формула, имеющая вид суммы (по модулю два) произведений, в которой каждое слагаемое является константой 0 или 1 либо одной из переменных, либо конъюнкцией нескольких переменных, называется **многочленом Жегалкина** от переменных $x_1, x_2, \ldots, xn$.

Теорема (Жегалкина). Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом.

Алгоритм построения многочлена Жегалкина.

Шаг 1. Построить СДНФ.

Шаг 2. В СДНФ дизъюнкцию заменить сложением по модулю 2.

Шаг 3. Заменить отрицание, используя формулу $1 \oplus x = \bar{x}$.

Шаг 4. Раскрыть скобки, пользуясь дистрибутивностью.

Шаг 5. Привести подобные слагаемые, используя формулу $0 = x \oplus x$.

Шаг 6. Упростить полученный многочлен, используя формулу $x \oplus x = 0$.

Булева функция называется линейной, если она может быть представлена многочленом Жегалкина, который содержит только слагаемые нулевой и первой степени, и не содержит конъюнкций разных переменных.

Классами Поста называются следующие классы: T_0, T_1, L, S, M.

Класс функций, сохраняющих константу 0:

$$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0,0,\ldots,0) = 0\}.$$

Класс функций, сохраняющих константу 1:

$$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1,1,\ldots,1) = 1\}.$$

Класс линейных функций:

$$L = \{f \in P_2 \mid f(x_1, x_{2, \ldots, xn}) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n\}.$$

Класс самодвойственных функций:

$$S = \{f \in P_2 \mid f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}\}.$$

Класс монотонных функций:

$$M=\{f \in P_2 | \forall_\alpha \forall_\beta\ \alpha \preceq \beta \rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\}$$

Теорема Поста. Множество булевых функций и является функционально полным тогда и только тогда, когда для каждого из классов Поста найдётся во множестве и функция, не принадлежащая этому классу.

Задачи 31 – 40

Алгоритм — это всякая система вычислений, выполняемых по строго определённым правилам, которая после какого-либо числа шагов заведомо приводит к решению поставленной задачи.

Свойства алгоритма

Конечность. Алгоритм состоит из отдельных элементарных шагов, или действий, причем множество различных шагов, из которых составлен алгоритм, конечно. Алгоритм должен заканчиваться за конечное число шагов. Если строится бесконечный, сходящийся к искомому решению процесс, то он обрывается на некотором шаге и полученное значение принимается за приближенное решение рассматриваемой задачи. Точность приближения зависит от числа шагов.

Элементарность (понятность). Каждый шаг алгоритма должен быть простым, чтобы устройство, выполняющее операции, могло выполнить его одним действием.

Дискретность. Процесс решения задачи представляется конечной последовательностью отдельных шагов, и каждый шаг алгоритма выполняется за конечное (не обязательно единичное) время.

Детерминированность (определенность). Каждый шаг алгоритма должен быть однозначно и недвусмысленно определен и не должен допускать произвольной трактовки. После каждого шага либо указывается, какой шаг делать дальше, либо дается команда остановки, после чего работа алгоритма считается законченной.

Результативность. Алгоритм имеет некоторое число входных величин — аргументов. Цель выполнения алгоритма состоит в получении конкретного результата, имеющего вполне определенное отношение к исходным данным. Алгоритм должен останавливаться после конечного числа шагов, зависящего от данных, с указанием того, что считать результатом. Если решение не может быть найдено, то должно быть указано, что в этом случае считать результатом.

Массовость. Алгоритм решения задачи разрабатывается в общем виде, т.е. он должен быть применим для некоторого класса задач, различающихся лишь исходными данными. При этом исходные данные могут выбираться из некоторой области, которая называется областью применимости алгоритма.

Алгоритм – конечная система правил, сформулированная на языке исполнителя, которая определяет последовательность перехода от допустимых исходных данных к искомому результату, обладающая свойствами дискретности, детерминированности, результативности, конечности и массовости.

Для того чтобы задать алгоритм, нужно задать семь характеризующих его (не независимых) параметров:

– совокупность возможных начальных данных;
– совокупность возможных результатов;
– совокупность возможных промежуточных результатов;
– правило начала работы алгоритма;
– правило выполнения шага алгоритма;
– правило окончания (остановки);
– правило извлечения результата.

Задачи 41 – 50

Одноместным предикатом, определенным на множестве D, называется предложение с переменной, которое превращается в высказывание при замене этой переменной на ее значение из множества D. Одноместный предикат будем называть **унарным** или **предикатом от одной переменной**.

n-местым предикатом с областью определения $D=D_1\times D_2\times\ldots\times Dn$ называется предикат $P(x_1, x_2,\ldots,xn)$ от n переменных, который превращается в высказывание при замене переменных $x_1,x_2,\ldots,xn$ на их значения из множеств $D_1,D_2,\ldots,Dn$ соответственно.

Рассмотрим n-местный предикат $P(x_1,x_2,\ldots,xn)$. В этом случае переменные берутся из множеств $D_1,D_2,\ldots,Dn$ соответственно. Можно рассмотреть множество $D=D_1\times D_2\times\ldots\times Dn$— декартово произведение множеств $D_1,D_2,\ldots,Dn$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные n-ки $(d_1,d_2,\ldots,dn)$ элементов исходных множеств.

Множество D называется **областью определения** предиката.

Областью истинности предиката $P(x_1,x_2,\ldots,xn)$ называется множество всех n-ок $(d_1,d_2,\ldots,dn)\in D$ таких, что при замене x_1 на d_1, x_2 на d_2, ..., xn на dn получается истинное высказывание.

Предикат $P(x_1,x_2,\ldots,xn)$ называется **тождественно истинным** если при любой замене переменных $x_1,x_2,\ldots,xn$ на их значения предикат превращается в истинное высказывание.

Предикат $P(x_1,x_2,\ldots,xn)$ называется **тождественно ложным** если при любой замене переменных $x_1,x_2,\ldots,xn$ на их значения предикат превращается в ложное высказывание.

5. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. На универсальном множестве U заданы множества A, B, C. Задать перечислением множества а) - в).

U= {10, 20, 30, 40, 50, 60}

A= {x| x=20n, n=1, 2, 3}

B= {x| x=30n, n=1, 2}

C= {x| x=10n, n=1, 2, 3}

а) $\overline{A}\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}$

б) $C\setminus B$

в) $(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$

Решение.

Зададим множества *A, B* и *C* перечислением:

A= {20; 40; 60},

B= {30; 60},

C= {10; 20; 30}.

а) Найдем дополнения множеств A, B и C:

$\overline{A}$ = {10; 30; 50},

$\overline{B}$ = {10; 20; 40; 50},

$\overline{C}$ = {40; 50; 60}.

Теперь выпишем пересечение трех дополнений $\overline{A}\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}$ ={50}.

б) Найдем разность множеств *C* и *B*: $C\setminus B$ ={10; 20}.

в) Задание выполняем в три действия: сначала находим результат объединения в первых скобках $A\bigcup C$ ={10; 20; 30; 40; 60}, потом результат объединения во вторых скобках $B\bigcup C$ ={10; 20; 30; 60} и, наконец, пересекаем результаты первого и второго действий $(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$ ={10; 20 30; 60}.

Ответ: а) {50}, б) {10; 20}, в) {10; 20 30; 60}.

Пример 2. Запишите с помощью логических операций следующее высказывание и вычислите его логическое значение: (Если «Обь впадает в Каспийское море», то «5 < 4»).

Решение. Обозначим x - высказывание «Обь впадает в Каспийское море», y - высказывание «5 < 4», логическая операция: $x \to y$. Значение x равно 0 («ложь»), значение y равно 0 («ложь»), значение сложного высказывания $x \to y = 0 \to 0$ - "истина"

Ответ: $x \to y=1$.

Пример 3. Для функции, заданной формулой $f = a\bar{b} \oplus c$, построить таблицу истинности, записать СДНФ, СКНФ, многочлен Жегалкина и проверить её принадлежность Классам Поста.

Решение. Для построения таблицы истинности определим порядок выполнения действий: сначала выполняется отрицание переменной b, потом конъюнкция и последнее действие неравнозначность.

Строим таблицу

a	***b***	***c***	$\bar{b}$	$a\bar{b}$	***f***
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

По таблице истинности строим СДНФ, используя алгоритм с. 14: $f = \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abc$.

Строим СКНФ по таблице:

$f = (a \vee b \vee c)\,\&\,(a \vee \bar{b} \vee c)\,\&\,(\bar{a} \vee b \vee \bar{c})\,\&\,(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$.

Используя СДНФ, строим многочлен Жегалкина:

$\bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abc = ((a \oplus 1)(b \oplus 1)c) \oplus ((a \oplus 1)bc) \oplus (a(b \oplus 1)(c \oplus 1)) \oplus abc$

Раскрываем скобки:

$((a \oplus 1)(b \oplus 1)c) \oplus ((a \oplus 1)bc) \oplus (a(b \oplus 1)(c \oplus 1)) \oplus abc =$

$abc \oplus ac \oplus bc \oplus c \oplus abc \oplus bc \oplus abc \oplus ab \oplus ac \oplus a \oplus abc$.

Убираем четное число повторов:

$f = c \oplus ab \oplus a$ - многочлен Жегалкина, нелинейный, т.к. содержит конъюнкцию ab, т.е. $f \notin L$

$f \in T_0$, т.к. f(0,0,0)=0, т.е. 0 сохраняет.

$f \in T_1$, т.к. f(1,1,1)=1, т.е. 1 тоже сохраняет.

$f \notin M$, т.к. при $(001) \prec (010) \Rightarrow f(0,0,1) = 1 > f(0,1,0) = 0$, т.е. функция не является монотонной.

$f \notin S$, т.к. $f(0,1,0) = 0 \neq \overline{f(1,0,1)} = \overline{0}$, т.е. функция не является самодвойственной.

Ответ: f= $(01011001)^T$;

$f_{СДНФ} = \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abc$;

$f_{СКНФ} = (a \vee b \vee c)\,\&\,(a \vee \bar{b} \vee c)\,\&\,(\bar{a} \vee b \vee \bar{c})\,\&\,(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$;

$f = c \oplus ab \oplus a$ - многочлен Жегалкина;

T_0	T	L	M	S
+	+	-	-	-

Пример 4. Последовательность чисел Падована задается рекуррентным соотношением:

F(1) = 1
F(2) = 1
F(3) = 1
F(n) = F(n–3) + F(n–2), при n >3, где n – натуральное число.

Чему равно десятое число в последовательности Падована?

Решение.

Последовательно находим:

F(4) = F(1) + F(2) = 2,
F(5) = F(2) + F(3) = 2,
F(6) = F(3) + F(4) = 3,
F(7) = F(4) + F(5) = 4,
F(8) = F(5) + F(6) = 5,
F(9) = F(6) + F(7) = 7,
F(10) = F(7) + F(8) = 9.

Десятое число в последовательности Падована равно 9.

Ответ: 9.

Пример 5. На универсальном множестве $U = \{x \in Z \mid x^2 - 4x - 21 \leq 0\}$ определены множества

$A=\{x\in U \mid \dfrac{x^2-x-12}{x(x-1)}\le 0\}$ и $B=\{x\in U \mid x^2-2x-3\ge 0\}$. Даны предикаты *P(x)* = «*x* принадлежит *A*» и *Q(x)*= «*x* принадлежит *B*». Найти область истинности предиката $R(x)=\neg(P(x)\vee Q(x))$*)*.

Решение.

Универсальное множество *U* состоит из целочисленных решений неравенства $x^2-4x-21\le 0$. Решением неравенства является промежуток [-3; 7], множеством *U* является множество целых чисел данного промежутка, т.е. U={-3; -2; -1;0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}.

Множества *A* и *B* состоят из элементов универсального множества *U*. Решением неравенства, определяющего множество *A* является объединение промежутков [-3; 0)⋃ (1; 4], из которого множеству U принадлежат элементы {-3; -2; -1; 2; 3; 4}, следовательно, область истинности предиката *P(x)* = «*x* принадлежит *A*» совпадает с множеством *A: I(P)=A.*

Решением неравенства, определяющего множество *B* является объединение промежутков (-∞; -1]⋃ [3; +∞), из которого множеству U принадлежат элементы {-3; -2; -1; 3; 4; 5; 6; 7}, следовательно, область истинности предиката *Q(x)* = «*x* принадлежит *B*» совпадает с множеством *B: I(Q)=B.*

Областью истинности предиката *R(x)* является множество $\overline{I(P)\bigcup I(Q)}$. Множество $I(P)\bigcup I(Q)$ = {-3; -2; -1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}, область истинности предиката *I(R)* – дополнение к полученному множеству, т.е. *I(R)*={0; 1}.

Ответ: *I(R)*= {0; 1}.

6. Литература

Список основной литературы

1. Игошин, В. И. Математическая логика: учеб. пособие / В.И. Игошин. — Москва: ИНФРА-М, 2019. — 398 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа: http://new.znanium.com]. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-011691-4. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/987006 (дата обращения: 29.12.2020). – Режим доступа: по подписке.

Список дополнительной литературы

1. Игошин, В.И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие / В.И. Игошин. — Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2019. — 392 с. — (Бакалавриат). - ISBN 978-5-906818-08-9 (КУРС); ISBN 978-5-16-011429-3 (ИНФРА-М, print); ISBN 978-5-16-103684-6 (ИНФРА-М, online). - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/986940 (дата обращения: 29.12.2020). – Режим доступа: по подписке.

Математическая логика и теория алгоритмов: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

Составитель Грунина Мария Викторовна

Подписано к печати “__”_______ 2021 г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160