ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Математика

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №№1,2

23.03.03 *Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов*
профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство

Новосибирск 2021

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №№1,2 / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. В.Н.Бабин, С.Н.Бурков, М.В.Грунина, И.В. Марчук – Новосибирск, 2021. – 20 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство).

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол №4 от 30 ноября 2021)

Ответственный за выпуск куратор по инженерным направлениям подготовки Е.В.Агафонова.

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое мышление,
– познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,
– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
– привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

– основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики;

– основные понятия и методы математического анализа;

– дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
– понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

– использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы,** то она **не будет зачтена.**

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ варианта	Номера задач контрольных работ по вариантам									
	Контрольная работа №1					Контрольная работа №2				
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3. Контрольная работа №1

В задачах **1-10** найти $P(A)$.

1. $P(A)=A^2-9A^{-1}-2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

2. $P(A)=A^2-3A^{-1}+2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$

3. $P(A)=A^2-4A^{-1}+5|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$

4. $P(A)=A^2+5A^{-1}-2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$

5. $P(A)=A^2-6A^{-1}+|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

6. $P(A)=A^2+2A^{-1}-8|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

7. $P(A)=A^2-7A^{-1}-2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

8. $P(A)=A^2-2A^{-1}+3|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

9. $P(A)=A^2+4A^{-1}-5|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$

10. $P(A)=A^2-5A^{-1}+2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$

В задачах **11–20** систему уравнений решить методом Гаусса.

11. $\begin{cases}2x-3y-5z=1\\ 3x+y-2z=-4\\ x-2y+z=5\end{cases}$

12. $\begin{cases}2x-3y+z=3\\ x+y-2z=4\\ 3x-2y+6z=0\end{cases}$

13. $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ 3x+y-3z=-1 \\ 2x-y+5z=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x+4y+2z=-9, \\ 2x-y-3z=-1, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x-2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=6 \\ x-3y-z=-5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$

В задачах **21-30** даны векторы $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$. Найти:

a) $\cos(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$;

b) $\overline{a}_1 \times \overline{a}_2$;

c) объём пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$.

21. $\vec{a}_1(2;1;2), \vec{a}_2(-1,2,4), \vec{a}_3(-2,4,4)$

22. $\vec{a}_1(2;2;1), \vec{a}_2(1,-4,-2), \vec{a}_3(4,-2,4)$

23. $\vec{a}_1(1;2;2), \vec{a}_2(2,4,-1), \vec{a}_3(4,4,-2)$

24. $\vec{a}_1(2;1;2), \vec{a}_2(-1,2,4), \vec{a}_3(-2,4,4)$

25. $\vec{a}_1(2;-1;2), \vec{a}_2(-1;2;-4), \vec{a}_3(4;2;4)$

26. $\vec{a}_1(2;1;-2),\ \vec{a}_2(1;2;-4),\ \vec{a}_3(4;4;2)$

27. $\vec{a}_1(-2;-1;2),\ \vec{a}_2(1;2;-4),\ \vec{a}_3(-4;-4;-2)$

28. $\vec{a}_1(2;-1;-2),\ \vec{a}_2(-1;2;4),\ \vec{a}_3(-4;-4;2)$

29. $\vec{a}_1(-2;1;-2),\ \vec{a}_2(1;-2;4),\ \vec{a}_3(-4;4;-2)$

30. $\vec{a}_1(-2;-1;-2),\ \vec{a}_2(1;2;4),\ \vec{a}_3(4;-4;-2)$

В задачах **31–40** даны координаты вершин треугольника *ABC*. Сделать чертёж и найти уравнение высоты *AD* и уравнение медианы *CM*.

31. $A(8;\ -1);\ B(-8;\ 11);\ C(-1;\ -13)$

32. $A(-10;\ 5);\ B(6;\ -7);\ C(-1;\ 17)$

33. $A(10;\ -4);\ B(-6;\ 8);\ C(\ 1;\ -16)$

34. $A(3;\ 2);\ B(-13;\ -10);\ C(-6;\ 14)$

35. $A(7;\ 4);\ B(-9;\ -8);\ C(-2;\ 16)$

36. $A(7;\ 3);\ B(-9;\ -9);\ C(-2;\ 15)$

37. $A(-13;\ 3);\ B(3;\ -9);\ C(-4;\ 15)$

38. $A(12;\ -2);\ B(-4;\ -14);\ C(3;\ 10)$

39. $A(7;\ 5);\ B(-9;\ -7);\ C(-2;\ 17)$

40. $A(13;\ 7);\ B(-3;\ -5);\ C(4;\ 19)$

В задачах **41-50** найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

41. $M_1(-6;\ 8;\ 5),\ M_2(6;\ -12;\ 10),\ M_3(9;\ -4;\ -5)$.

42. $M_1(-6;\ 6;\ 4),\ M_2(4;\ 3;\ -4),\ M_3(-2;\ 3;\ 2)$.

43. $M_1(-6;\ 3;\ 6),\ M_2(4;\ -6;\ 2),\ M_3(2;\ -3;\ 2)$.

44. $M_1(6;\ -6;\ 0),\ M_2(-4;\ 3;\ 4),\ M_3(4;\ 6;\ -6)$.

45. $M_1(2;\ 9;\ -6),\ M_2(-2;\ 3;\ 2),\ M_3(-4;\ 15;\ -4)$.

46. $M_1(4;\ 6;\ -6),\ M_2(2;\ 3;\ -2),\ M_3(4;\ 9;\ -8)$.

47. $M_1(-9;\ 6;\ 2),\ M_2(9;\ -6;\ 2),\ M_3(3;\ -4;\ 4)$.

48. $M_1(6;\ 4;\ -6),\ M_2(6;\ -6;\ 4),\ M_3(-9;\ 4;\ 4)$.

49. $M_1(-6;\ 8;\ -2),\ M_2(-6;\ -2;\ 8),\ M_3(-3;\ -2;\ 6)$.

50. $M_1(6;\ -4;\ 2),\ M_2(3;\ -4;\ 4),\ M_3(-6;\ 2;\ 4)$.

4. Контрольная работа №2

В задачах **51-60** даны точки A_1, A_2, A_3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1A_2.

51. $A_1(4;\ 2;\ 5),\ A_2(0;\ 7;\ 2),\ A_3(0;\ 2;\ 7)$.

52. $A_1(4;\ 4;\ 10),\ A_2(4;\ 10;\ 2),\ A_3(2;\ 8;\ 4)$.

53. $A_1(4;\ 6;\ 5),\ A_2(6;\ 9;\ 4),\ A_3(2;\ 10;\ 10)$.

54. $A_1(3;\ 5;\ 4),\ A_2(8;\ 7;\ 4),\ A_3(5;\ 10;\ 4)$.

55. $A_1(10;\ 6;\ 6),\ A_2(-2;\ 8;\ 2),\ A_3(6;\ 8;\ 9)$.

56. $A_1(1;\ 8;\ 2),\ A_2(5;\ 2;\ 6),\ A_3(5;\ 7;\ 4)$.

57. $A_1(6;\ 6;\ 5),\ A_2(4;\ 9;\ 5),\ A_3(4;\ 6;\ 11)$.

58. $A_1(7;\ 2;\ 2),\ A_2(5;\ 7;\ 7),\ A_3(5;\ 3;\ 1)$.

59. $A_1(8; 6; 4)$, $A_2(10; 5; 5)$, $A_3(5; 6; 8)$.
60. $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$.

В задачах **61-80** найти пределы функций

61. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$

62. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$

63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$

64. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$

65. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x+4}$

66. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$

67. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$

68. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$

69. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$

70. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$

71. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$

72. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$

73. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$

74. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$

75. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$

76. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$

77. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$

78. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$

79. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$

80. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$

В задачах **81–90** найти производную.

81. $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}{3x^3}$.

82. $y=\dfrac{(1+3x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

83. $y=\dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{120x^5}$.

84. $y=\dfrac{\left(3x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

85. $y=\dfrac{4+3x^3}{x^3\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$.

86. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

87. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.

88. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

89. $y=\dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

90. $y=\dfrac{x-1}{\left(3x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$.

В задачах **91–100** найти производную.

91. $y=(2x+3)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{2}{3}\left(4x^2+12x+11\right)\sqrt{x^2+3x+2}$, $2x+3>0$;

92. $y=(3x^2-4x+2)\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{3x-2}$, $3x-2>0$;

93. $y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-5x}\right)$

94. $y=\dfrac{2}{3}\left(4x^2-4x+3\right)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{2x-1}$, $2x-1>0$

95. $y=\arcsin\left(e^{-4x}\right)+\ln\left(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1}\right)$

96. $y=\left(3x+1\right)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{3x+1}+\left(3x^2+2x+1\right)\sqrt{9x^2+6x}$, $3x+1>0$

97. $y=\dfrac{1}{24}\left(x^2+8\right)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x}$, $x>0$

98. $y=\dfrac{x^4}{81}\arcsin\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{81}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}$, $x>0$

99. $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-3x}\right)$

100. $y=3\arcsin\dfrac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$, $4x+1>0$

5. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти $P(A)$.

$$P(A)=A^2-2A^{-1}+3|A|E,\quad A=\begin{pmatrix}1&-2\\4&3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-2\\4&3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&-2\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot4 & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot3\\ 4\cdot1+3\cdot4 & 4\cdot(-2)+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-8\\16&1\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу ищем по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}.$

$|A|=1\cdot3-(-2)\cdot4=11,\ \ A_{11}=3,\ \ A_{12}=-4,\ \ A_{21}=2,\ \ A_{22}=1.$

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{11}&\frac{2}{11}\\[4pt]\frac{-4}{11}&\frac{1}{11}\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$P(A)=A^2-2A^{-1}+3|A|E=\begin{pmatrix}-7&-8\\16&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}\frac{3}{11}&\frac{2}{11}\\[4pt]\frac{-4}{11}&\frac{1}{11}\end{pmatrix}+3\cdot11\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7&-8\\16&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{6}{11}&-\frac{4}{11}\\[4pt]\frac{8}{11}&-\frac{2}{11}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}33&0\\0&33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{280}{11}&-\frac{92}{11}\\[4pt]\frac{184}{11}&\frac{372}{11}\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Систему уравнений решить методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6,\\2x_1+3x_2-4x_3=20,\\3x_1-2x_2-5x_3=6.\end{cases}$$

Решение. Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right)(-2)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 18 & 32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)(-4) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 58 & 116 \end{array}\right) : 58 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)(18)(-3) \sim .$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (8; 4; 2).

Пример 3. Даны векторы $\bar{a}_1(-1, 2, -2)$, $\bar{a}_2(2, -2, 1)$, $\bar{a}_3(3, -4, 2)$. Найти:

a) $\cos(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$;

b) $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$;

c) объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$.

Решение.

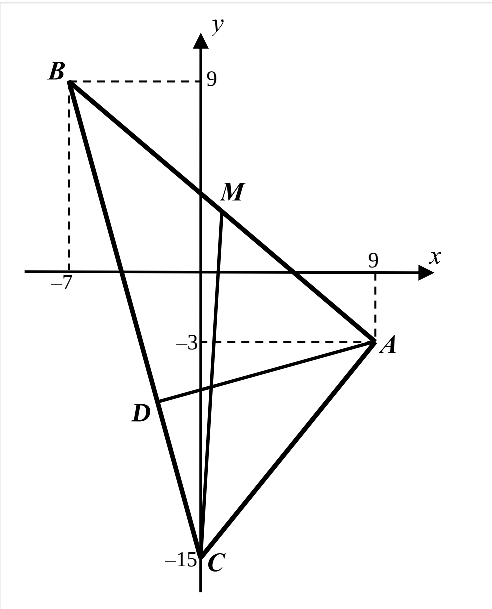
a) $\cos(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \dfrac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = \dfrac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2) + (-2)\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\dfrac{8}{9}$;

b) $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k} - 4\bar{k} + \bar{j} - 4\bar{i} = -2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}$;

c) $V = \frac{1}{6} \cdot \left| \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| 4 + 6 + 16 - 12 - 8 - 4 \right| = \frac{1}{3}$.

Пример 4. Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Сделать чертёж и найти уравнение высоты *AD* и уравнение медианы *CM*. *A*(9; –3); *B*(–7; 9); *C*(0; –15)

Решение.



$\overline{BC} = \{x_C - x_B, y_C - y_B\} = \{0 - (-7), -15 - 9\} = \{7, -24\}$.

Высота *AD* проходит через точку *A* и перпендикулярна стороне *BC*. Используем уравнение прямой через точку (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\bar{a} = \{a_x, a_y\}$: $a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) = 0$.

AD: $7(x-9) - 24(y+3) = 0$, $7x - 63 - 24y - 72 = 0$, $7x - 24y - 135 = 0$.

Точка *M* – середина стороны *AB*. Её координаты:

$$M_x = \frac{A_x + B_x}{2} = \frac{9-7}{2} = 1, \;\; M_y = \frac{A_y + B_y}{2} = \frac{-3+9}{2} = 3, \;\; M(1,3).$$

Уравнение прямой через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2): $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

CM: $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y+15}{3+15}$, $x = \dfrac{y+15}{18}$, $18x = y + 15$, $18x - y - 15 = 0$.

Ответ: AD: $7x - 24y - 135 = 0$. CM: $18x - y - 15 = 0$.

Пример 5. Найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.
$M_1(-6; 8; 5)$, $M_2(4; 3; -4)$, $M_3(2; -3; 2)$.

Решение: Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

У нас

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-8 & z-5 \\ 4+6 & 3-8 & -4-5 \\ 2+6 & -3-8 & 2-5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+6 & y-8 & z-5 \\ 10 & -5 & -9 \\ 8 & -11 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$15(x+6) - 72(y-8) - 110(z-5) + 40(z-5) + 30(y-8) - 99(x+6) = 0,$$

$$-84(x+6) - 42(y-8) - 70(z-5) = 0,$$

$$6(x+6) + 3(y-8) + 5(z-5) = 0,$$

$$6x + 36 + 3y - 24 + 5z - 25 = 0,$$

$$6x + 3y + 5z - 13 = 0,$$

Запишем уравнение этой плоскости в отрезках

$$6x + 3y + 5z = 13, \;\; \frac{6x}{13} + \frac{3y}{13} + \frac{5z}{13} = 1, \;\; \frac{x}{13/6} + \frac{y}{13/3} + \frac{z}{13/5} = 1.$$

Плоскость отсекает на координатных осях отрезки длиной $\dfrac{13}{6}$, $\dfrac{13}{3}$ и $\dfrac{13}{5}$ соответственно. Тогда объём пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{13}{6}\cdot\frac{13}{3}\cdot\frac{13}{5}=\frac{2197}{540}\approx 4,07.$$

Пример 6. Даны точки $A_1(4;\ 2;\ 5)$, $A_2(4;\ 10;\ 2)$, $A_3(2;\ 10;\ 10)$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1A_2.

Решение: $\overline{A_1A_2}=\{4-4,10-2,2-5\}=\{0,8,-3\}$.

Уравнение искомой прямой: $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-10}{8}=\dfrac{z-10}{-3}$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-4x+17}{2x^2+9x-3}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-4x+17}{2x^2+9x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(8-\frac{4}{x}+\frac{17}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{9}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{8}{2}=4.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-6x-7}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-10x+21}{x^2-6x-7}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-3)}{(x-7)(x+1)}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-3)}{(x+1)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Пример 9: Найти производную $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

Решение.

Воспользуемся формулой логарифмического дифференцирования $y'=y\,(\ln y)'$.

$$\ln y=\ln\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}=3\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(x-3),$$

тогда $y'=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{4(x-2)}+\dfrac{2}{5(x-3)}\right)$.

Пример 10: Найти производную

$$y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}+\frac{3x^2-1}{\sin x},$$

Решение.

$$y'=\left(\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}+\frac{3x^2-1}{\sin x}\right)'=$$

$$=\left(\cos x\right)'\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)'+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}(\operatorname{arctg}\ln(2x+3))'+$$

$$+\frac{(3x^2-1)'\sin x-(3x^2-1)(\sin x)'}{(\sin x)^2}=$$

$$=-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\left(1+\sin^2 x\right)'+$$

$$+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}\frac{1}{1+(\ln(2x+3))^2}(\ln(2x+3))'+\frac{6x\sin x-(3x^2-1)\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}+\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}2\sin x\left(\sin x\right)'+$$

$$+\frac{e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}}{1+\ln^2(2x+3)}\cdot\frac{1}{2x+3}(2x+3)'+\frac{6x\sin x-(3x^2-1)\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}+\frac{2e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}}{(1+\ln^2(2x+3))(2x+3)}+.$$

$$+\frac{6x\sin x-(3x^2-1)\cos x}{\sin^2 x}$$

6. Вопросы к экзамену

1. Система линейных уравнений. Метод Гаусса
2. Определители второго и третьего порядка. Разложение определителя по строке и столбцу.
3. Свойства определителей.
4. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.
5. Действия над матрицами.
6. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
7. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Линейные операции над векторами.
9. Теорема о максимальном числе линейно-независимых векторов в системе. Базис.
10. Правила сложения векторов. Проекции векторов, их свойства.
11. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Их свойства.
12. Основные теоремы о пределах функции.
13. Теоремы о бесконечно малых.
14. Замечательные пределы.
15. Свойства непрерывных функций.
16. Непрерывность основных элементарных функций.
17. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
18. Правила дифференцирования.
19. Производные основных элементарных функций.
20. Связь дифференциала и производной.
21. Свойства дифференциала.
22. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши,
23. Правило Лопиталя.
24. Необходимое и достаточное условие возрастания функции на отрезке.
25. Необходимое условие существования экстремума.
26. Достаточные условия существования экстремума.
27. Необходимое и достаточное условие выпуклости функции на отрезке.
28. Достаточное условие существования точки перегиба.

7.1. Список основной литературы

1. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. — Москва: ИНФРА-М, 2021. — 479 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/5394. - ISBN 978-5-16-010072-2. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1185673 (дата обращения: 17.06.2021). – Режим доступа: по подписке.
2. Ячменев, Л. Т. Высшая математика: учебник / Л. Т. Ячменёв. - Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2020. - 752 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-01032-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1056564 (дата обращения: 17.06.2021). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Список дополнительной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т.1, - М.: Интеграл – Пресс, 2006
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т.2 , - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №№1,2

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна
Марчук Игорь Владимирович

Подписано к печати “__”_______ 2021 г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160